Восточно-Казахстанский технический
университет им. Д. Серикбаева

УДК 681.5.011; 004.942; 621.865.8. На правах рукописи

ОРАЗОВА АРАЙЛЫМ ЖАНБОЛАТКЫЗЫ

Применение нелинейных методов для управления многозвенным роботом-манипулятором

8D07101 – Автоматизация и управление

Диссертация на соискание степени
доктора философии (Ph.D.)

Отечественный научный
консультант:
д.ф.-м.н., профессор,
Алонцева Дарья Львовна

Зарубежный научный
консультант:
Ph.D., профессор,
Tamas Haidegger

Республика Казахстан
Усть–Каменогорск, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ, СОКРАЩЕНИЯ И ТЕРМИНЫ 4
ВВЕДЕНИЕ 5
1 АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗВЕННЫМИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ 9
1.1 Многозвенный робот-манипулятор как нелинейный объект управления 9
Выводы по разделу 1.1: 16
1.2 Анализ методов траекторного управления многозвенными роботами-манипуляторами 16
Выводы по разделу 1.2: 22
1.3 Дифференциальная плоскостность и робастное управление многозвенными роботами-манипуляторами 23
Выводы по подразделу 1.3: 28
Выводы по разделу 1, постановка цели и задач диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту: 29
2 Дифференциальная плоскостность многозвенного робота-манипулятора и обобщенный метод вычисляемых моментов 31
2.1 Математическая модель динамики двухзвенного манипулятора 31
2.2 Непрерывные динамические системы и геометрическая интерпретация уравнения динамики систем с управлением 37
2.3 Координатные преобразования систем с управлением, соответствующие преобразованиям статической обратной связью, и траекторная эквивалентность систем с управлением 47
2.4 Обобщенный метод вычисляемых моментов и синтез линейного регулятора 53
2.5 Компьютерное исследование траекторного управления на основе СТС 64
Выводы по разделу 2 81
3 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ 83
3.1 Динамика двухзвенного планарного манипулятора в терминах дифференциальной геометрии двумерных поверхностей в трёхмерном пространстве 83
3.2 Тензор кинетической энергии многозвенного манипулятора 99
3.3 Линеаризация уравнения динамики статической обратной связью 104
3.4 Компьютерная проверка геометрического представления и линеаризации динамики 106
Вывод по разделу 3: 115
4 НЕЛИНЕЙНОЕ РОБАСТНОЕ ТРАЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ 116
4.1 Постановка задачи робастного траекторного управления 116
4.2 Влияние неопределенностей и возмущений на динамику ошибки 117
4.3 Синтез нелинейного робастного закона траекторного управления 119
4.4 Частотный анализ чувствительности замкнутой системы к возмущениям 122

4.5 Компьютерное исследование робастного закона при параметрических неопределённостях и внешних возмущениях 127
Выводы по разделу 4: 139
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 140
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 142
ПРИЛОЖЕНИЕ А 150

ОБОЗНАЧЕНИЯ, СОКРАЩЕНИЯ И ТЕРМИНЫ

В тексте диссертационной работы использованы следующие сокращения:

АЧХ	Амплитудно-частотная характеристика
Дифференциально плоская система типа А	Система управления, относящаяся к классу дифференциально плоских систем, у которой плоский выход зависит только от переменных состояния системы
СТС	Computed Torque Control, управление по крутящему моменту
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers, Институт инженеров электротехники и электроники (профессиональная техническая организация)
MPC	Model Predictive Control, управление на основе прогнозирующей модели
ODE	Ordinary Differential Equations, обыкновенные дифференциальные уравнения
PRISMA	Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses (предпочтительные параметры отчетности для систематических обзоров и мета-анализов)
ПД (PD)	Пропорционально-дифференцирующий регулятор (англ. Proportional–Derivative controller)
ПИ (PI)	Пропорционально-интегральный регулятор (англ. Proportional-integral controller)
ПИД (PID)	Пропорционально-интегрально-дифференцирующий регулятор (англ. Proportional-integral-derivative controller
ADRC	Активное подавление возмущений (англ. Active Disturbance Rejection Control).
DMD	Динамическая модовая декомпозиция (англ. Dynamic Mode Decomposition).
DOF	Степени свободы (англ. Degrees of Freedom)
LQR	Линейно-квадратичный регулятор (англ. Linear Quadratic Regulator)
RMSE	Среднеквадратическая ошибка (англ. Root Mean Square Error)

ВВЕДЕНИЕ

Ключевые слова: многозвенный робот-манипулятор, нелинейное управление, метод вычисляемого момента (Computed Torque Control, CTC), дифференциальная плоскостность, линеаризация обратной связью, робастное управление, трение в сочленениях, неопределенность модели, слежение за траекторией.

Актуальность. Современные многозвенные роботы-манипуляторы применяются в промышленности, медицине, строительстве, логистике и других областях, где требуется точное воспроизведение заданных траекторий при высокой скорости движения и изменяющихся условиях работы. Качество функционирования таких систем непосредственно зависит от эффективности алгоритмов управления, обеспечивающих точность, устойчивость и робастность движения.

Динамика многозвенного манипулятора представляет собой существенно нелинейную, многосвязную систему, параметры которой могут изменяться в процессе эксплуатации. На движение манипулятора влияют неопределенность инерционных характеристик, изменение массы полезной нагрузки, силы трения, внешние возмущения и погрешности математической модели. Поэтому применение классических линейных регуляторов не всегда обеспечивает требуемые показатели качества во всем диапазоне рабочих режимов.

Одним из распространенных подходов к траекторному управлению манипуляторами является метод вычисляемых моментов, основанный на компенсации нелинейной динамики объекта и его линеаризации посредством обратной связи. Метод вычисляемых моментов также относится к методам управления на основе обратной динамики также классифицируется как управление с обратной динамикой, то есть метод управления движением в робототехнике, который использует модель динамики робота для линеаризации и развязки нелинейных связей между сочленениями. Последовательный манипулятор с силовым управлением при этом может рассматриваться как дифференциально плоская система особого типа, а метод вычисляемых моментов — как частный случай общего метода траекторного управления такими системами. Основные преимущества CTC хорошо известны, это простота синтеза, высокая точность и независимость управления суставами.

Однако эффективность CTC-подобных методов существенно зависит от точности математической модели. При наличии параметрических неопределенностей, неучтенной динамики и внешних воздействий полная компенсация нелинейностей становится невозможной, вследствие чего снижаются точность слежения и устойчивость системы. Недостаточная робастность классических методов линеаризации обратной связью ограничивает их применение при управлении многозвенными манипуляторами. Для повышения устойчивости к неопределённостям модели и внешним возмущениям целесообразно дополнить закон управления нелинейной составляющей, сохранив преимущества метода вычисляемых моментов.

Дифференциально-геометрический подход позволяет описывать динамику манипулятора через метрику конфигурационного пространства, определяемую кинетической энергией, и ковариантную производную. Такое представление упрощает запись уравнений движения и даёт геометрическую интерпретацию линеаризации обратной связью. В связи с этим актуальной задачей является разработка нелинейных методов траекторного управления многозвенными манипуляторами на основе дифференциальной плоскостности, линеаризации обратной связью и робастной коррекции.

Диссертационное исследование проводилось в рамках двух проектов государственного грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (КН МНВО РК): № AP19679327 «Методы машинного обучения в задачах автоматического управления и инерциальной навигации мобильных роботов» и № AP13068317 «Разработка новых алгоритмов управления роботом-манипулятором для технологий 3D-сканирования и аддитивного микроплазменного напыления покрытий». Первый проект относится к приоритету «Информационные, коммуникационные и космические технологии» и подприоритету «Интеллектуальные робототехнические системы».

Исследования в рамках этих проектов охватывали математическое моделирование робототехнических систем, разработку и анализ алгоритмов управления, а также изучение методов планирования и отслеживания траекторий движения роботов-манипуляторов.

Объектом исследования является многозвенный последовательный робот-манипулятор с силовым управлением.

Предметом исследования являются математические модели, методы линеаризации обратной связью и нелинейные робастные алгоритмы траекторного управления многозвенным роботом-манипулятором.

Цель исследования: разработка и исследование нелинейного метода траекторного управления многозвенным роботом-манипулятором, обеспечивающего повышение точности и робастности системы при наличии параметрических неопределенностей, погрешностей математической модели и внешних возмущений.

Задачи исследования:

1. Провести анализ существующих методов управления многозвенными роботами-манипуляторами, включая методы линеаризации обратной связью, вычисляемых моментов и робастного управления.

2. Разработать математическую модель динамики последовательного многозвенного манипулятора с силовым управлением с учетом взаимного влияния звеньев, инерционных, кориолисовых, центробежных и гравитационных составляющих.

3. Исследовать последовательный манипулятор как дифференциально плоскую систему управления особого типа и определить его плоский выход.

4. Показать связь метода вычисляемых моментов с общим методом траекторного управления дифференциально плоскими системами рассматриваемого типа.

5. Описать динамику многозвенного манипулятора в терминах дифференциальной геометрии, используя метрику конфигурационного пространства и ковариантную производную.

6. Установить условия линеаризации динамики манипулятора с помощью обратной связи и описать структуру эквивалентной линейной системы.

7. Оценить влияние параметрических неопределённостей, неточностей модели и внешних возмущений на качество управления при использовании классического метода вычисляемых моментов.

8. Синтезировать для линеаризованной системы нелинейный робастный закон управления, обеспечивающий устойчивое слежение за заданной траекторией в условиях неопределённостей и возмущений.

9. Теоретически обосновать устойчивость замкнутой системы управления и установить условия сходимости ошибки слежения за заданной траекторией.

10. Провести компьютерное исследование разработанных методов траекторного управления роботом-манипулятором в программной среде MATLAB/Simulink, оценить точность траекторного слежения, характер переходных процессов и динамические характеристики системы управления.

11. Выполнить сравнительный анализ разработанного нелинейного закона управления и классического метода вычисляемых моментов по показателям точности, устойчивости и робастности.

Основные методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории автоматического управления, математического моделирования динамических систем, дифференциальной геометрии, теории дифференциальной плоскостности, линеаризации обратной связью, методы анализа устойчивости и численного исследования динамических систем. Компьютерные исследования выполнены в программной среде MATLAB/Simulink с использованием математической модели двухзвенного робота-манипулятора. Исследованы процессы траекторного слежения, динамические характеристики замкнутой системы управления, влияние параметров регулятора на качество переходных процессов, а также согласованность аналитических и численных результатов.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Последовательный робот-манипулятор как дифференциально плоская система управления особого типа; обобщенный метод вычисляемых моментов и линеаризация системы управления манипулятором.

2. Геометрическая интерпретация динамики манипулятора и линеаризация статической обратной связью.

3. Нелинейный робастный закон траекторного управления роботом-манипулятором, основанный на линеаризации обратной связью и компенсации неопределенностей математической модели.

Научная новизна работы заключается в том, что:

На основе представления последовательного многозвенного робота-манипулятора с силовым управлением как дифференциально плоской системы типа А впервые обоснована возможность применения обобщённого метода вычисляемых моментов для траекторного управления манипулятором.

Установлено, что метод вычисляемых моментов является частным случаем общего метода траекторного управления дифференциально плоскими системами типа А.

Разработан нелинейный робастный закон управления линеаризованной динамикой многозвенного робота-манипулятора, обеспечивающий устойчивость и повышение точности траекторного движения при наличии параметрических неопределенностей, погрешностей математической модели и внешних возмущений.

Получены условия устойчивости замкнутой системы управления и сходимости ошибки траекторного слежения при использовании разработанного нелинейного робастного закона управления.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы доложены и обсуждены на 3-х международных конференциях:

1. VIII Международная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана», 7–8 апреля 2022 г., г. Усть-Каменогорск, Казахстан;

2. 18th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2023), 16 ноября 2023 г., г. Секешфехервар, Венгрия;

3. X Международная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана», посвященная 125-летию Каныша Сатпаева, 11–12 апреля 2024 г., г. Усть-Каменогорск, Казахстан.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано **8** научных работ, в том числе **2** статьи опубликованы в международных рецензируемых научных журналах Sensors (Q2 по Web of Science, 2025 г.) и Siberian Electronic Mathematical Reports (Q3 по Web of Science, 2024 г.), **3** статьи в научных изданиях, рекомендуемых уполномоченным органом в области науки и высшего образования Республики Казахстан, и **3** публикации в материалах международных научных конференций.

Диссертация имеет практическое значение:

- результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс ВКТУ им. Д. Серикбаева по образовательной программе 6В07101 «Автоматизация и управление» и используются при преподавании дисциплины «Нелинейные системы автоматического регулирования» для проведения лекционных занятий и самостоятельной работы обучающихся (акт внедрения научно-исследовательской работы в учебный процесс от 28.02.2024 г.).

Личный вклад автора состоит: в самостоятельном выборе темы и постановке проблемы исследования, формулировке цели и задач диссертации; в проведении аналитических расчетов и экспериментов по компьютерной симуляции, в разработке модели манипулятора и новых методов управления им; в самостоятельном анализе результатов, формулировании научных выводов и основных защищаемых научных положений, а также в апробации и внедрении результатов исследования, а именно: в подготовке научных публикаций в рецензируемых изданиях, выступлениях на конференциях и в практическом внедрении результатов в учебный процесс.

1 АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗВЕННЫМИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ

1.1 Многозвенный робот-манипулятор как нелинейный объект управления

Многозвенный робот-манипулятор представляет собой сложную электромеханическую систему, состоящую из взаимосвязанных звеньев, соединенных управляемыми кинематическими парами. Движение каждого звена влияет на положение и динамическое состояние остальных звеньев, вследствие чего манипулятор рассматривается как многомерный объект управления со взаимосвязанными каналами [1]. Манипуляторы применяются при выполнении точных, монотонных, повторяющихся и опасных операций в промышленности, медицине, аэрокосмической отрасли, сельском хозяйстве и логистике. Ли и соавторы [2] определяют роботизированные манипуляторы как механические руки, предназначенные для выполнения операций, имитирующих функции руки человека. Авторы отмечают, что традиционные промышленные манипуляторы преимущественно состоят из жестких звеньев и сочленений, тогда как современные облегченные конструкции могут обладать упругостью звеньев, приводов и передаточных механизмов.

Основу конструкции многозвенного робота-манипулятора составляют последовательно или параллельно соединенные звенья. Звено представляет собой относительно жесткий либо упругий элемент механической системы, соединяющий соседние сочленения. Первое звено связывается с неподвижным или подвижным основанием, а последнее — с рабочим органом. Геометрические параметры звеньев, их масса, моменты инерции и взаимное расположение непосредственно определяют размеры рабочей области, грузоподъемность, быстродействие и динамические характеристики манипулятора.

Соединение соседних звеньев осуществляется посредством кинематических сочленений. По характеру относительного движения сочленения роботов подразделяются прежде всего на вращательные и поступательные. Во вращательном сочленении относительное движение звеньев задается угловой координатой $q_i=\theta_i$, а в поступательном — линейным перемещением $q_i=d_i$. Горбанпур в статье [3] рассматривает манипулятор как систему жестких звеньев, соединенных вращательными или поступательными сочленениями, и определяет рабочую область как пространственную область, внутри которой робот способен перемещать рабочий орган или удерживаемый объект.

Движение каждого управляемого сочленения обеспечивается приводом, включающим двигатель, редуктор или иную механическую передачу, тормозное устройство и силовую электронику. В современных промышленных роботах преимущественно используются электрические сервоприводы, однако для задач, требующих больших усилий, могут применяться гидравлические и пневматические приводы. Се [4] показывает, что основными компонентами роботизированного сочленения являются двигатель, передаточный механизм,

выходной вал и датчики. При этом упругость датчика момента, редуктора и других элементов передачи должна учитываться в динамической модели, поскольку она влияет на точность движения и может вызывать колебания рабочего органа.

Информацию о состоянии манипулятора обеспечивают внутренние и внешние датчики. К внутренним относятся энкодеры положения, датчики скорости, тока и момента приводов. Внешняя сенсорная система может включать силомоментные датчики, камеры, оптические измерительные устройства, акселерометры и датчики расстояния. Спачек и соавторы в исследовании [5] рассматривают использование силомоментных, оптических и инерциальных датчиков для организации управления рабочим органом семистепенного манипулятора. Данные от датчиков используются для формирования обратной связи, коррекции траектории и компенсации внешних возмущений.

Вращательные сочленения обеспечивают поворот одного звена относительно другого вокруг заданной оси. Они широко применяются в антропоморфных промышленных роботах благодаря компактности конструкции и возможности формирования сложных пространственных движений. Поступательные сочленения обеспечивают линейное перемещение вдоль направляющей и используются в декартовых, портальных и телескопических механизмах. В составе одного манипулятора могут одновременно применяться оба типа сочленений. Например, Кумар и др. исследуют пространственный многозвенный манипулятор, содержащий поступательное сочленение, вращательные сочленения, жесткое звено и два пространственно деформируемых звена [6].

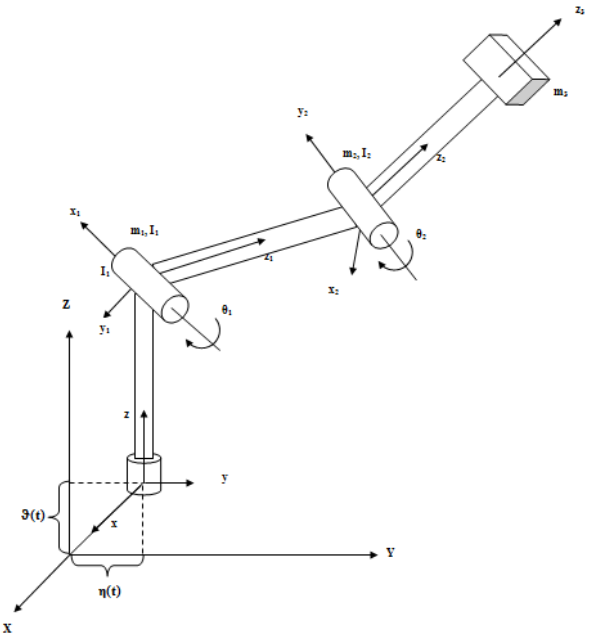


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пространственного многозвенного манипулятора с поступательными и вращательными сочленениями [6]

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [6, p. 5]

Как видно из рисунка 1.1, движение манипулятора рассматривается относительно неподвижной инерциальной системы координат X, Y, Z. Подвижная платформа перемещается в горизонтальной плоскости, причем ее поступательное движение описывается координатами $\eta(t)$ и $\vartheta(t)$. Таким образом, основание манипулятора является дополнительным источником кинематического возбуждения, которое передается последовательно расположенным звеньям.

С каждым звеном связана локальная система координат x_i y_i z_i, где ось z_i направлена вдоль продольной оси соответствующего звена. Использование локальных координатных систем позволяет определять положение, ориентацию и упругие перемещения каждого элемента относительно предыдущего звена, а затем преобразовывать их в неподвижную систему координат.

Первое звено рассматривается как жёсткий элемент, соединяющий подвижное основание с остальной частью манипулятора. Второе и третье звенья рассматриваются как гибкие элементы, способные испытывать пространственные упругие деформации. Их длины обозначены соответственно l_1 и l_2. На конце последнего звена расположена полезная нагрузка массой m_3, влияние которой учитывается при формировании динамической модели.

Для описания гибких звеньев авторы [6] используют модель балки Эйлера–Бернулли. Упругие перемещения учитываются в локальных системах координат, а деформации предполагаются малыми по сравнению с длиной звеньев. Уравнения движения звеньев, сочленений и приводов получены на основании расширенного вариационного принципа Гамильтона.

Представленная конструкция является нелинейным многосвязным объектом управления. Нелинейность обусловлена пространственным вращением звеньев, тригонометрической зависимостью координат полезной нагрузки от углов θ_1 и θ_2, изменением инерционных характеристик при движении, а также взаимодействием поступательных, вращательных и упругих перемещений. В результате управляющий момент, приложенный к одному сочленению, оказывает влияние не только на соответствующую координату, но и на движение других звеньев и колебания рабочего органа.

При синтезе системы управления рассмотренным манипулятором следует учитывать движение основания, динамическое взаимодействие звеньев, параметры приводов, упругость конструкции и изменения полезной нагрузки. Без учёта этих факторов возможны остаточные колебания, увеличение времени установления и снижение точности позиционирования рабочего органа [6].

На последнем звене устанавливается рабочий орган, или концевой эффектор, непосредственно взаимодействующий с объектом или технологической средой. В зависимости от назначения робота рабочим органом может выступать механический или вакуумный захват, сварочная горелка, режущий инструмент, распылитель, измерительный прибор либо специализированное медицинское устройство. Положение и ориентация рабочего органа определяются совокупностью обобщенных координат всех предшествующих сочленений.

Авторы [6] отмечают, что движение каждого сочленения влияет на динамическое состояние всей механической системы. Изменение положения одного звена вызывает перераспределение инерционных нагрузок, изменение конфигурации манипулятора и появление дополнительных колебаний последующих звеньев. В результате координаты, скорости и ускорения отдельных сочленений оказываются динамически связанными, что не позволяет рассматривать каналы управления независимо друг от друга.

Для получения уравнений движения авторы применили вариационный принцип Гамильтона, а упругие звенья представили в виде балочных элементов Эйлера–Бернулли. Полученная модель учитывает движение подвижного основания, повороты и поступательные перемещения сочленений, упругие деформации звеньев и воздействие полезной нагрузки. Уравнения движения имеют нелинейный и взаимосвязанный характер, вследствие чего изменение управляющего момента одного привода отражается на движении всего манипулятора.

Результаты исследования показывают, что физические и геометрические параметры звеньев существенно влияют на отклонения сочленений, продолжительность переходных процессов и остаточные колебания рабочего органа. Особенно заметное влияние оказывают длина и жесткость звеньев, свойства материала, масса полезной нагрузки и характер управляющего воздействия. При использовании скачкообразных управляющих моментов продолжительность затухания остаточных колебаний возрастает по сравнению с плавным синусоидальным воздействием [6].

Таким образом, многозвенный робот-манипулятор представляет собой нелинейный многосвязный объект управления, динамические характеристики которого изменяются в зависимости от текущей конфигурации, скорости движения, параметров полезной нагрузки и упругости конструкции. Пренебрежение указанными факторами при построении системы управления приводит к увеличению траекторных ошибок, возникновению колебаний и снижению точности позиционирования рабочего органа

Число независимых обобщенных координат, полностью определяющих положение механической системы, называется числом степеней свободы. Каждое одноподвижное вращательное или поступательное сочленение обычно добавляет одну степень свободы. Для произвольного позиционирования и ориентирования рабочего органа в трехмерном пространстве требуется шесть независимых степеней свободы: три координаты положения и три угла ориентации. Скалера и др. в статье [7] отмечают, что наиболее распространенные промышленные манипуляторы имеют шесть последовательно расположенных управляемых осей. Вместе с тем для отдельных технологических задач может быть достаточно меньшего количества осей, что позволяет снизить стоимость, массу и энергопотребление робота.

Вращательные сочленения обеспечивают поворот одного звена относительно другого вокруг заданной оси. Они широко применяются в антропоморфных промышленных роботах благодаря компактности конструкции и возможности формирования сложных пространственных движений.

Поступательные сочленения обеспечивают линейное перемещение вдоль направляющей и используются в декартовых, портальных и телескопических механизмах. В составе одного манипулятора могут одновременно применяться оба типа сочленений. Эльхадиди и соавторы [8] исследуют кинематическое управление шестистепенным роботом-манипулятором с использованием облачных технологий и учётом задержек передачи данных.

Совокупность всех положений, достижимых рабочим органом при допустимых перемещениях сочленений, образует рабочую область манипулятора. Ее форма и размеры определяются количеством и типом сочленений, длинами звеньев, пределами перемещения приводов, наличием препятствий и ограничениями по ориентации рабочего органа. Следует различать область достижимости, в которой рабочий орган может занять хотя бы одну ориентацию, и область полной маневренности, в каждой точке которой обеспечивается требуемый диапазон ориентаций [9, 10].

Если число степеней свободы манипулятора превышает минимальное количество координат, необходимых для выполнения заданной операции, такой робот называется кинематически избыточным. Например, семистепенной манипулятор при решении шестимерной задачи позиционирования обладает одной избыточной степенью свободы [11]. Избыточность позволяет обходить препятствия, избегать особых положений, оптимизировать энергозатраты и сохранять требуемое положение рабочего органа при изменении конфигурации промежуточных звеньев. В работе Чоурасия и соавторов [12] показано, что использование всех семи осей позволяет одновременно перемещать рабочий орган в пространстве и стабилизировать установленный на нем объект. Галлардо-Алварадо и др. [13] также отмечают, что увеличение избыточности расширяет функциональные возможности роботизированной системы и повышает ее отказоустойчивость.

Для дальнейшего исследования целесообразно выбрать последовательный манипулятор, в котором звенья образуют открытую кинематическую цепь, а каждое последующее звено присоединяется к предыдущему одним сочленением. Выбор последовательной структуры обусловлен её широким применением в промышленной робототехнике, относительной простотой компоновки, большой рабочей областью и возможностью выполнения пространственных операций при небольшом числе приводов. Риго и соавторы [14] показали, что структуру манипулятора можно синтезировать под конкретную технологическую задачу, обеспечив достижимость требуемых положений при меньшем числе осей.

К современным методам траекторного управления многозвенными роботами относится модельно-прогнозирующее управление (MPC). Муруган и соавторы [15] предложили структуру системы управления манипулятором с MPC-регулятором, учитывающим ограничения (рисунок 1.2). Регулятор рассчитывает оптимальные управляющие воздействия на основе прогноза движения на конечном временном горизонте. При этом учитываются ограничения на положения и скорости сочленений, моменты приводов, а также условия предотвращения столкновений.

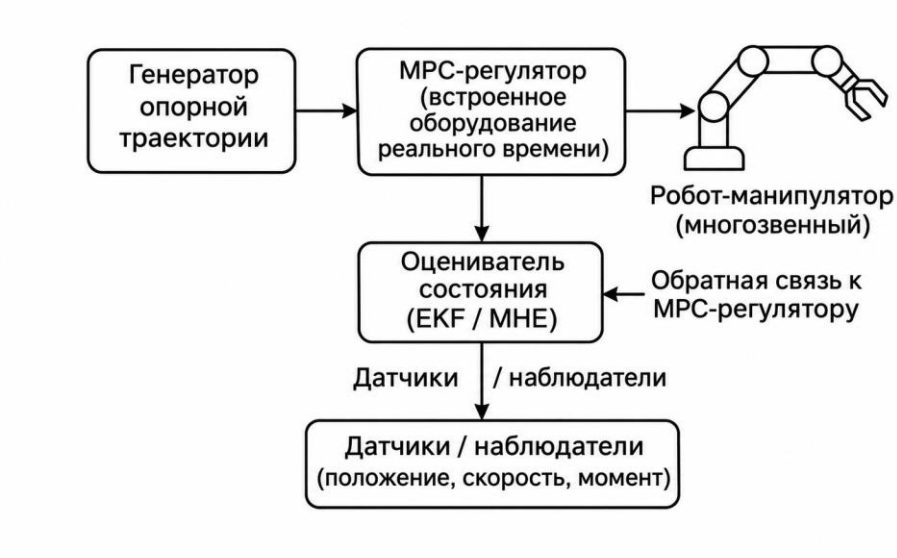


Рисунок 1.2 – Структурная схема системы управления многозвенным роботом-манипулятором на основе MPC

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [15, p. 333]

Замкнутая система (рисунок 1.2) включает генератор траектории, MPC-регулятор, манипулятор, датчики и блок оценки состояния. Регулятор рассчитывает оптимальные управляющие воздействия по заданной траектории и оценке состояния с учётом ограничений приводов. При этом необходимо учитывать нелинейную динамику, межзвенные связи и неполноту измерений. Вместе с тем применение данного метода в реальном времени связано с высокой вычислительной сложностью и зависимостью качества управления от точности математической модели [15].

Несмотря на эффективность MPC, неопределённость параметров, внешние возмущения и изменение полезной нагрузки требуют дополнения системы управления механизмами адаптации.

Раоуфи и соавторы [16] отмечают, что нелинейность, межзвенные связи и изменение параметров затрудняют точное моделирование манипулятора, а параметрические неопределённости влияют на точность слежения.

Шегота и соавторы [17] указывают на сложность и возможные ошибки построения динамической модели промышленного робота. Для её проверки используются алгоритмы Ньютона–Эйлера и Лагранжа–Эйлера, а для аппроксимации динамики исследуются нейронные сети.

Субеди и соавторы [18] показывают, что неучёт гибкости звеньев приводит к статическим и траекторным ошибкам, а также колебаниям рабочего органа. Авторы применяют метод предполагаемых форм колебаний совместно с формализмом Лагранжа и отмечают зависимость динамики от конфигурации манипулятора и полезной нагрузки.

Управление в реальном времени требует компромисса между точностью модели и вычислительной сложностью. Сокращение числа учитываемых форм колебаний снижает размерность модели, но оставляет часть высокочастотной динамики неучтённой. Следовательно, даже достаточно подробная модель

может содержать остаточную неучтенную динамику, влияние которой необходимо учитывать при синтезе системы управления.

Наличие параметрических неопределенностей и внешних возмущений обусловило развитие робастных методов траекторного управления. Одним из распространенных направлений является управление со скользящим режимом. В работе [19] предложен адаптивный несингулярный быстродействующий терминальный алгоритм скользящего режима, предназначенный для траекторного управления манипулятором при неопределенности модели и внешних возмущениях. Авторы отмечают высокую робастность методов скользящего режима по отношению к изменениям параметров системы и внешним воздействиям, одновременно рассматривая проблемы сингулярности, вычислительной сложности и построения соответствующего закона управления.

Рассмотренные методы показывают, что задача повышения робастности может решаться посредством непосредственной компенсации неопределенностей исходного нелинейного объекта. Вместе с тем существует другой класс подходов, основанный на предварительном преобразовании нелинейной динамики объекта к более простой форме и последующем синтезе закона управления для преобразованной системы.

Характерным примером является исследование Рахмани и Редкара [20]. Авторы используют теорию оператора Купмана для получения линейного представления нелинейной динамики двухстепенного робота-манипулятора. Оператор Купмана строится на основе метода динамической модовой декомпозиции, после чего для полученной линеаризованной модели применяется дробный алгоритм управления со скользящим режимом.

Данный подход представляет интерес с точки зрения общей структуры задачи управления: сначала выполняется преобразование исходного нелинейного объекта к эквивалентному либо приближенному линейному представлению, после чего для полученной системы формируется закон управления, обеспечивающий требуемые показатели качества и робастности. В работе [20] авторы непосредственно выделяют в качестве этапов предложенного метода линеаризацию нелинейной динамики манипулятора посредством теории Купмана и последующее применение дробного управления со скользящим режимом к линеаризованной модели.

При этом применение методов линеаризации не устраняет проблему неопределенности модели как таковую. Эффективность модельно-ориентированных алгоритмов управления определяется степенью соответствия используемой модели реальному объекту. В работе [20] также подчеркивается зависимость ряда методов управления от точности динамической модели манипулятора и рассматриваются управление на основе данных как один из способов аппроксимации его динамических характеристик.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что многозвенный робот-манипулятор представляет собой нелинейный многосвязный объект управления с конфигурационно-зависимой динамикой. Изменение положения звеньев, массы полезной нагрузки, параметров механической системы, сил трения и внешних воздействий приводит к возникновению параметрических и

функциональных неопределенностей. При этом усложнение математической модели не позволяет полностью устранить расхождение между моделью и реальным объектом и одновременно повышает вычислительные затраты.

Выводы по разделу 1.1:

Многозвенный последовательный робот-манипулятор представляет собой нелинейный многосвязный объект управления, динамические характеристики которого зависят от текущей конфигурации механической системы, скоростей движения звеньев, инерционных параметров и массы полезной нагрузки. Динамическая взаимосвязь обобщенных координат приводит к тому, что управляющее воздействие, приложенное к одному сочленению, оказывает влияние на движение всей механической системы.

Математическое описание динамики манипулятора неизбежно содержит неопределенности, обусловленные неточностью определения массово-инерционных параметров, изменением полезной нагрузки, силами трения, упругостью элементов конструкции, неучтенной динамикой и внешними возмущениями. Повышение детализации модели позволяет учитывать дополнительные физические процессы, однако приводит к увеличению ее порядка и вычислительной сложности и не обеспечивает полного соответствия модели реальному объекту.

Применение модельно-ориентированных методов траекторного управления требует учитывать расхождение между номинальной и фактической динамикой манипулятора. Проведенный анализ современных исследований показывает, что для повышения устойчивости к неопределенностям применяются адаптивные, робастные, скользящие и управление на основе данных. Вместе с тем каждый из указанных подходов имеет ограничения, связанные с вычислительной сложностью, необходимостью оценивания неопределенностей либо зависимостью от качества используемой модели.

Перспективным направлением построения системы траекторного управления является преобразование исходной нелинейной динамики манипулятора посредством обратной связи к системе более простой структуры с последующим формированием закона управления для преобразованного объекта. В связи с этим дальнейшее исследование целесообразно направить на анализ методов траекторного управления, основанных на компенсации нелинейной динамики и линеаризации обратной связью, а также на оценку их чувствительности к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям.

1.2 Анализ методов траекторного управления многозвенными роботами-манипуляторами

Одним из базовых этапов построения системы траекторного управления является определение взаимосвязи между заданным движением рабочего органа и соответствующим движением сочленений манипулятора. Поэтому значительная часть исследований в области управления роботами посвящена решению прямой и обратной задач кинематики.

В работе Илюхин и соавторы. исследована обратная кинематика пятистепенного манипулятора. Авторами построена математическая модель кинематики и получены решения прямой и обратной задач на основе геометрического подхода с последующей реализацией в MATLAB [21]. Данный подход демонстрирует возможность аналитического определения конфигурации сочленений по заданному положению рабочего органа, однако его применение связано со структурой конкретного манипулятора.

Аналогичная задача для последовательного манипулятора с пятью степенями свободы рассмотрена Сингх и соавторы. Авторы сопоставили аналитическое решение обратной кинематики с оптимизационным методом последовательных методов наименьших квадратов. Экспериментальная проверка выполнена для операции захвата и перемещения объектов с использованием системы технического зрения. Полученные результаты показали возможность применения как аналитического, так и оптимизационного подхода для определения требуемых конфигураций манипулятора [22].

Для численного решения обратной задачи кинематики широкое распространение получили методы, основанные на матрице Якоби. В работе Хок и др. рассмотрены методы псевдообратной матрицы и транспонирования Якобиана. Авторы отмечают, что аналитическое решение обратной задачи существует только для сравнительно простых кинематических структур, тогда как для более сложных конфигураций возникает необходимость применения численных методов [23].

Практическая реализация такого подхода представлена Агустиан и др., где для управления манипулятором использован метод Пропорционально-дифференциальное управление на основе псевдообратной матрицы Якоби совместно с прямой кинематикой Денавита–Хартенберга.

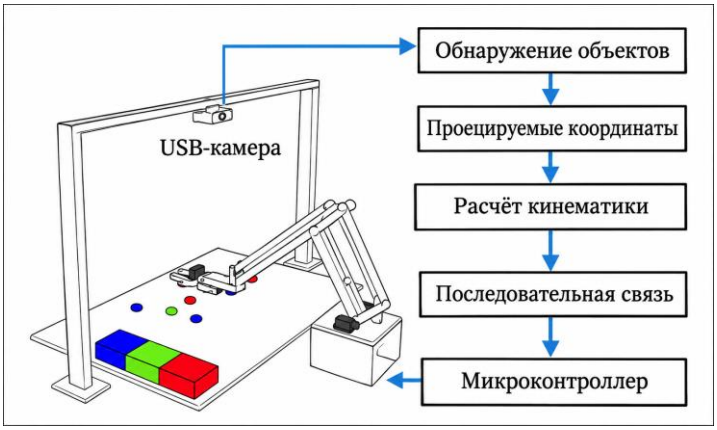


Рисунок 1.3 – Экспериментальная модель манипулятора для сортировки объектов по цвету

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [24, p. 12]

Координаты рабочего органа формировались системой технического зрения, после чего алгоритм обратной кинематики определял соответствующие

углы сочленений. Экспериментальная реализация продемонстрировала вероятность успешного выполнения операции сортировки 94,46 % при евклидовой ошибке менее 1,2 см [24].

При увеличении числа степеней свободы и усложнении кинематической структуры получение обратного преобразования становится более сложной задачей. В частности, применение методов, непосредственно использующих обращение матрицы Якоби, связано с проблемой сингулярных конфигураций.

Для устранения данного ограничения Лопес-Франко и др. предложили использовать дифференциальную эволюцию при решении обратной задачи кинематики мобильного манипулятора. В отличие от традиционных подходов, предложенный алгоритм не требует обращения матрицы Якоби, что позволяет учитывать избыточность системы и избегать проблем, связанных с сингулярными конфигурациями. Работоспособность метода подтверждена как моделированием, так и экспериментами на омнинаправленном мобильном манипуляторе [25].

Проблема сингулярности более подробно исследована Дулемба. Автор рассматривает аддитивные, мультипликативные и основанные на сингулярном разложении матрицы методы робастной обратной кинематики. Показано, что прохождение сингулярных конфигураций может обеспечиваться посредством соответствующей модификации матрицы манипулируемости либо введения ограничения на минимальное сингулярное значение. При этом повышение устойчивости алгоритма в окрестности сингулярности сопровождается снижением точности отслеживания заданной траектории рабочего органа [26].

Отдельное направление связано с использованием методов машинного обучения. Малик и др. предложили решать обратную задачу кинематики семистепенного манипулятора с использованием глубокого обучения с подкреплением. Прямая кинематика описывалась посредством произведения экспонент, а в качестве решателя обратной задачи использовался алгоритм глубокого обучения с подкреплением. Полученный алгоритм формировал траектории в пространстве сочленений по заданной декартовой траектории рабочего органа и был экспериментально апробирован на роботизированной руке [27].

Таким образом, рассмотренные исследования показывают, что задача преобразования заданной траектории рабочего органа в траектории обобщенных координат может решаться аналитическими, численными, оптимизационными и интеллектуальными методами. Однако кинематическое описание определяет геометрическое соответствие между координатами рабочего органа и сочленений и само по себе не учитывает силы и моменты, необходимые для реализации сформированного движения.

Необходимость учета динамических свойств манипулятора обусловлена тем, что фактическое воспроизведение заданной траектории определяется не только кинематическими соотношениями, но и действующими силами и моментами, инерционными взаимодействиями звеньев, гравитацией, трением и другими факторами. Поэтому при построении высокоточных систем

траекторного управления кинематическая модель дополняется динамическим описанием объекта.

В работе Хэ для пятистепенного манипулятора построена кинематическая модель на основе метода Денавита–Хартенберга и проведено моделирование в MATLAB Robotics Toolbox. При этом автор отдельно подчеркивает, что кинематическая модель не рассматривает действующие на робота силы, а описывает главным образом взаимосвязь параметров сочленений с положением и ориентацией рабочего органа [28].

Связь кинематического и динамического описания рассматривается также Чжао и др. Авторы подчеркивают, что точное моделирование динамики является основой дальнейшего исследования характеристик манипулятора и разработки алгоритмов управления. В работе [29] совместно рассматриваются кинематика, динамика и импульс, а моделирование выполняется с использованием MATLAB/Simulink.

Традиционно динамические модели роботов-манипуляторов формируются на основе законов механики, среди которых наиболее распространены методы Эйлера–Лагранжа и Ньютона–Эйлера.

Горитов и др. в статье [30] рассматривают автоматизированное получение динамических характеристик манипулятора на основе уравнений Эйлера–Лагранжа. Разработанный авторами алгоритм позволяет решать прямую и обратную задачи динамики и получать временные зависимости динамических характеристик объекта.

Микоски и др. в статье [31] подчеркивают непосредственную связь динамического моделирования с задачей управления: управляющие силы и моменты в сочленениях должны обеспечивать движение манипулятора по заданной траектории. Взаимное влияние звеньев усложняет анализ движения. Для его исследования авторы построили аналитическую и имитационную модели динамики трёхзвенного манипулятора в MATLAB/Simulink.

Санчез и соавторы [32] предложили упростить методологию Эйлера–Лагранжа за счёт внутренних свойств динамической модели для сокращения вычислительных затрат. Сложность вывода уравнений авторы связывают с нелинейностью динамики и ростом числа степеней свободы.

Учёт дополнительных физических факторов уточняет динамическое описание, но усложняет модель и увеличивает вычислительную нагрузку в контуре управления.

Лус Жуниор и соавторы [33] включили модель трения ЛюГри в описание одностепенного манипулятора. Параметры определялись по экспериментальным данным нелинейным методом наименьших квадратов, что позволило точнее описать динамику реального объекта.

Джинг и соавторы [34] разработали для двухрукого манипулятора с упругими сочленениями рекурсивную модель повышенного порядка на основе метода Ньютона–Эйлера и применили линеаризацию обратной связью. Сравнение с методом вычисляемого момента, использующим модель с жёсткими сочленениями, показало преимущество этого подхода при отслеживании траектории объекта.

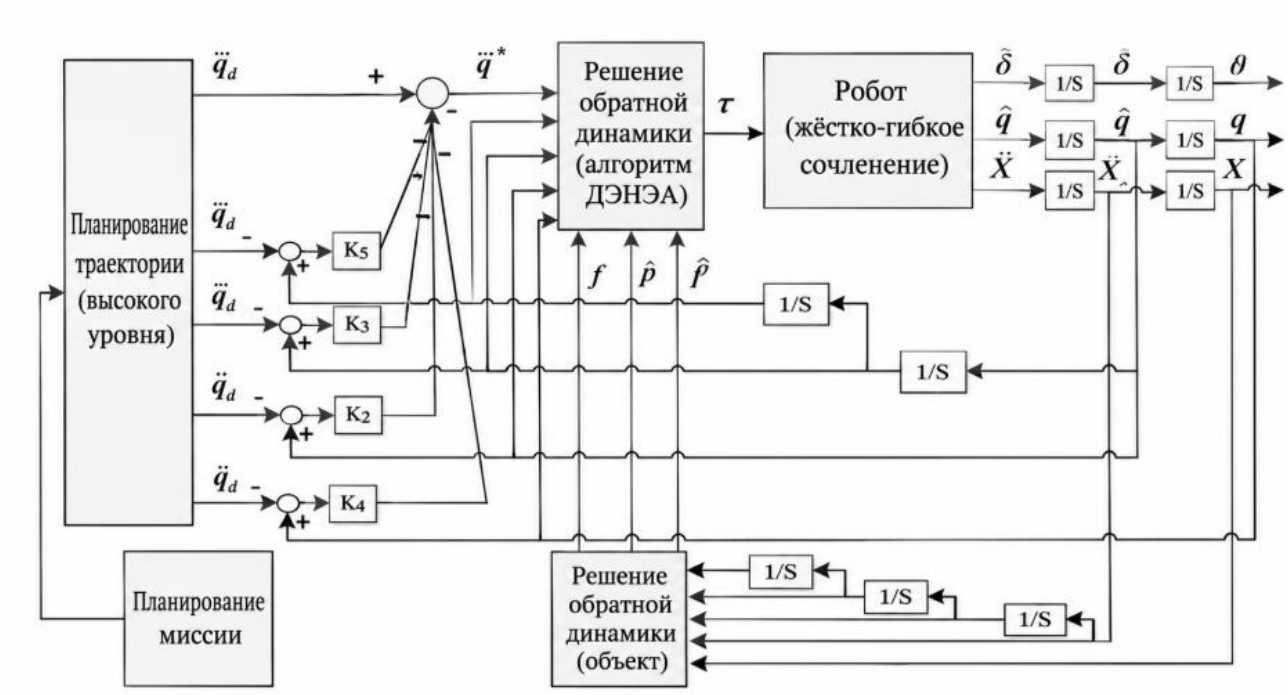


Рисунок 1.4 – Структурная схема модельно-ориентированного управления манипулятором на основе обратной динамики

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [34, p. 155099]

На рисунке 1.4 показано формирование управляющего воздействия с помощью обратной динамической модели. Качество компенсации нелинейностей зависит от её точности, а погрешности модели могут приводить к систематическим ошибкам.

Для высокоточного управления промышленным манипулятором Сюй и соавторы предложили расширенную модель упругих сочленений (Extended Flexible Joint Model). Она учитывает деформации в различных направлениях, которые неполно описываются моделями абсолютно жёсткого робота или моделями с упругостью только во вращательных направлениях сочленений. В экспериментах ошибки положения снизились более чем на 65 %, а ориентации — более чем на 62 % [35].

Повышение точности модельно-ориентированного управления требует учёта трения, упругости сочленений и деформаций конструкции. Это усложняет математическое описание, но не устраняет полностью расхождение между номинальной моделью и реальным объектом.

В связи со сложностью аналитического получения высокоточных моделей развивается направление идентификации динамики непосредственно по экспериментальным данным.

Омар и др. предложили трехэтапный подход управления на основе данных к получению динамических уравнений последовательных манипуляторов. Метод сочетает формирование библиотеки потенциальных функций, SINDy-PI, информационный критерий Акаике и последующее применение SINDy для определения структуры динамических уравнений и их параметров. Подход был

исследован на нескольких объектах, включая двухзвенные модели роботов KUKA и Stanford [36].

Развитие данного направления представлено Истикфара и др., которые рассматривают идентификацию динамики трехстепенного манипулятора в условиях шума измерений. Авторами предложен алгоритм, позволяющий разделить идентифицированные составляющие на инерционные, кориолисовы, центробежные и гравитационные компоненты. Экспериментальные исследования на реальном манипуляторе показали повышение точности и разреженности получаемой модели при одновременном сокращении времени обработки [37].

Управление на основе данных позволяет уменьшить зависимость процесса моделирования от ручного аналитического вывода уравнений и учитывать особенности реального объекта на основе измеряемых данных. Вместе с тем качество полученной модели становится зависимым от объема и качества экспериментальной информации, уровня измерительных шумов и выбранной структуры идентификации.

Медрано-Эрмосилло и др. рассматривают динамическое моделирование и управление роботами в фазовом пространстве на основе уравнений Гамильтона, теории винтов и геометрической алгебры [38]. Для управления авторами разработаны два закона — на основе традиционной линеаризации обратной связью и скользящего режима. При этом первый подход ориентирован на непосредственную компенсацию нелинейной динамики, тогда как использование скользящего режима обеспечивает робастность по отношению к согласованным возмущениям.

Рассмотренные работы показывают, что эффективность методов, основанных на компенсации нелинейной динамики, непосредственно связана с точностью модели, используемой в законе управления. Следовательно, при наличии параметрических неопределенностей, неучтенной динамики и внешних возмущений возникает необходимость либо адаптации параметров модели, либо введения дополнительной робастной составляющей.

Проблема параметрической неопределенности непосредственно рассматривается Уих и Ву. При наличии неопределенностей кинематических и динамических параметров структура системы управления усложняется за счет введения механизмов адаптации и оценивания неизвестных переменных. В работе [39] предложена система адаптивного траекторного управления, включающая основной регулятор, законы обновления неизвестных параметров и наблюдатель состояния. Структура системы представлена на рисунке 1.5 [39].

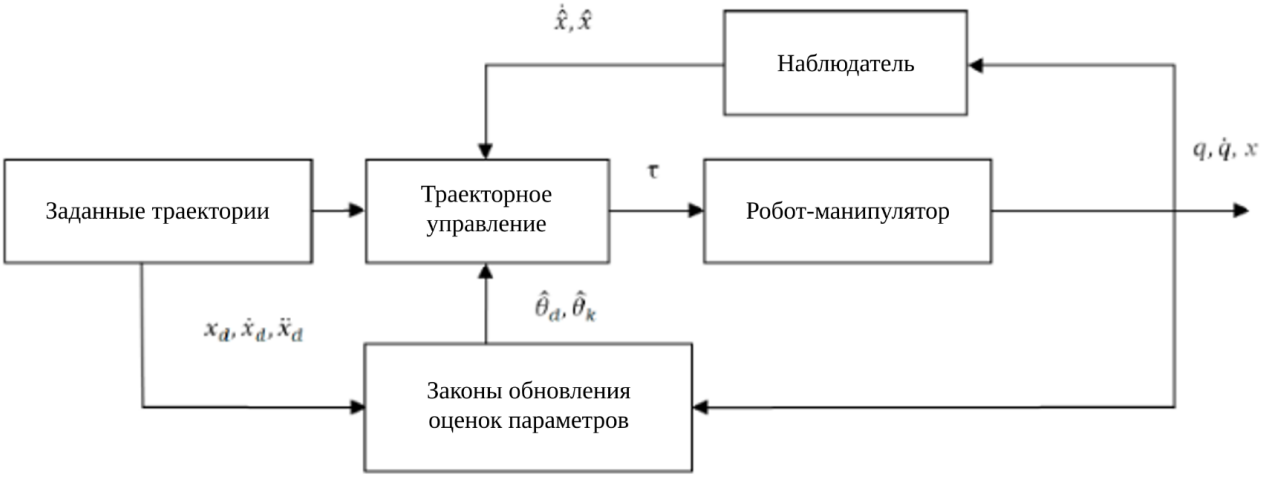


Рисунок 1.5 – Структурная схема адаптивного траекторного управления манипулятором при параметрической неопределенности

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [39, p. 5]

В отличие от системы управления, полностью опирающейся на фиксированную номинальную модель, адаптивная структура предусматривает корректировку оценок параметров в процессе функционирования объекта. Авторы установили, что при соответствующем выборе параметров управления возможна асимптотическая сходимость ошибок слежения и оценивания к нулю.

Чжан и соавторы рассматривают управление манипулятором с шестью степенями свободы при действии неопределённых возмущений, изменяющихся во времени. Динамическая модель объекта получена на основе энергетического подхода Лагранжа, после чего для оценки неизвестного возмущения используется наблюдатель, а для траекторного управления — интегральный алгоритм скользящего режима [40].

Развитие траекторного управления манипуляторами связано с переходом от кинематических алгоритмов к модельно-ориентированным методам, учитывающим нелинейную динамику. Модель уточняют за счёт учёта трения, упругости и других физических факторов либо идентификации по экспериментальным данным. Однако её усложнение не устраняет расхождений с реальным объектом. Это особенно существенно для методов обратной динамики и линеаризации обратной связью, где точность модели определяет качество компенсации нелинейностей. Поэтому управление дополняют адаптивными и робастными механизмами, снижающими чувствительность системы к параметрическим неопределённостям и внешним возмущениям.

Выводы по разделу 1.2:

Проведённый анализ показывает, что модельно-ориентированное траекторное управление требует достаточно точного описания нелинейной динамики манипулятора, тогда как на практике сохраняются параметрические неопределённости, неучтённая динамика и внешние возмущения. Поэтому

дальнейшее исследование целесообразно направить на приведение уравнений движения к более простой эквивалентной форме и оценку чувствительности такого преобразования к погрешностям модели. Это обосновывает последующее рассмотрение линеаризации обратной связью, метода вычисляемого момента и его связи с дифференциальной плоскостностью системы.

1.3 Дифференциальная плоскостность и робастное управление многозвенными роботами-манипуляторами

Развитие методов управления многозвенными роботами-манипуляторами связано не только с повышением точности воспроизведения заданной траектории, но и с необходимостью сохранения требуемых показателей качества при наличии неопределенностей математической модели, внешних возмущений, изменения параметров объекта и взаимодействия рабочего органа с окружающей средой. Как было показано в предыдущем подразделе, применение методов, основанных на компенсации нелинейной динамики и линеаризации обратной связью, позволяет существенно упростить задачу синтеза регулятора. Вместе с тем эффективность такой компенсации непосредственно зависит от соответствия используемой модели фактической динамике объекта.

В связи с этим значительное число современных исследований направлено на разработку адаптивных и робастных методов, обеспечивающих заданное качество траекторного движения при неполной информации об объекте управления. Для обеспечения ограничений на ошибку слежения авторами используется барьерная функция Ляпунова, а адаптивная составляющая позволяет учитывать неизвестные неисправности исполнительных механизмов без необходимости их детальной идентификации в реальном времени [41]. Работоспособность метода исследована применительно к двухзвенному роботу-манипулятору. Данная работа показывает, что при переходе от идеализированной модели к реальной робототехнической системе задача управления должна учитывать не только параметрическую неопределенность, но и возможное изменение характеристик исполнительной подсистемы. При этом точная информация об объекте на практике может быть недоступна вследствие сложности его структуры, что дополнительно обусловливает применение адаптивных методов.

Другой подход к обеспечению устойчивости и робастности рассматривается Ларби и др. [42]. Авторы предложили синтез импедансного регулятора по критерию H∞ с сохранением пассивности робота и заданных локальных характеристик в выбранных конфигурациях. Пассивность используется для обеспечения устойчивого взаимодействия со средой, а H_∞-критерий для формирования требуемых характеристик замкнутой системы.

Кумар и соавторы [43] исследовали влияние упругости звеньев и сочленений на динамику двухзвенного манипулятора. Разработанная модель учитывает призматические и вращательные сочленения; проанализированы траектории рабочего органа, модальные характеристики и устойчивость установившихся нелинейных режимов.

Для противодействия неопределённостям и возмущениям применяются методы скользящего режима. Бэй и соавторы [44] предложили регулятор для позиционного управления последовательным манипулятором с двухуровневой адаптацией усилений и оцениванием динамики с использованием временной задержки. Адаптация обеспечивает настройку робастной составляющей. Устойчивость обоснована методом Ляпунова, эффективность исследована моделированием и экспериментами в реальном времени.

Чжан и соавторы [45] разработали адаптивное несингулярное управление со скользящим режимом и оценкой заранее неизвестной верхней границы возмущений. Доказана сходимость за фиксированное время, верхняя оценка которого не зависит от начальных условий.

Го и соавторы [46] объединили несингулярный терминальный регулятор скользящего режима с нелинейным наблюдателем для оценивания и компенсации возмущений. Регулятор обеспечивает конечное время сходимости. Устойчивость исследована методом Ляпунова, эффективность — на модели двухстепенного манипулятора с трением в сочленениях.

Метод вычисляемого момента (СТС) позволяет компенсировать нелинейную динамику посредством линеаризации обратной связью, однако зависит от точности модели. Ахмед и соавторы [47] дополнили его робастной составляющей для снижения влияния неопределённостей и внешних возмущений. Устойчивость полученной системы исследована методом Ляпунова.

В работе [48] структурированные неопределённости связываются с неточностью параметров при известной структуре модели, а неструктурированные — с неучтённой динамикой, трением, упругостью и внешними возмущениями. Для их компенсации СТС объединён с расширенным наблюдателем состояния, который оценивает совокупное возмущение в реальном времени.

Неранон и соавторы [49] рассматривают гибридное силопозиционное управление при взаимодействии человека и робота. Экспериментальная система включает многокомпонентный датчик силы/момента, внешний контур реального времени и ПИ-регулятор силы, обеспечивающий устойчивую работу при неизвестной жёсткости и движении среды.

Конг и соавторы [50] предложили адаптивное импедансное управление с нечёткой настройкой для отслеживания контактной силы при неполной информации о среде. Гиерлак [51] разработал закон управления для контакта с упругой средой неизвестных параметров. Дополнительная коррекция силы по нормали к поверхности позволяет сохранять устойчивость при геометрических неопределённостях.

Янг и соавторы [52] дополнили СТС средствами улучшения переходных процессов при ограничениях приводов и робастной составляющей для аппроксимации и компенсации неопределённостей. Сходимость подтверждена теоретически, а моделирование показало повышение устойчивости к неопределённостям и внешним воздействиям.

Сюй и соавторы [53] объединили адаптивную составляющую, импедансное регулирование силы и управление адмиттансом в системе с силовой обратной связью. Подход экспериментально проверен при шлифовании криволинейной поверхности промышленным роботом.

Лв и соавторы [54] рассматривают гибридное управление при неопределённостях, возмущениях и насыщении управляющего воздействия. Динамические неопределённости и согласованные возмущения аппроксимируются радиально-базисными нейронными сетями, несогласованные возмущения оцениваются наблюдателем, а контактная сила регулируется нечётким ПИ-регулятором.

Таким образом, адаптация, робастная компенсация и наблюдатели снижают зависимость управления от точности модели и априорных сведений о возмущениях. В рассмотренных исследованиях СТС преимущественно выступает как специализированный метод управления манипуляторами. Концепция дифференциальной плоскостности позволяет рассмотреть преобразование нелинейной динамики и формирование траекторий в более общей постановке. Для дифференциально плоских систем состояние и управляющие воздействия могут быть представлены через плоский выход и конечное число его производных, что создает основу для систематического построения заданных траекторий и соответствующих управляющих воздействий. В связи с этим представляет интерес исследование условий, при которых динамика последовательного силоуправляемого манипулятора может быть рассмотрена как дифференциально плоская система специального типа, а классический СТС — как частный случай более общего метода траекторного управления такими системами.

Одним из подходов, позволяющих сформировать такое представление, является концепция дифференциальной плоскостности. Основы данного направления были сформулированы Флисс и др. [55]. Авторы вводят понятие плоского, или линеаризующего, выхода и показывают фундаментальную связь плоскостности с динамической линеаризуемостью системы. В частности, ими установлено, что система эквивалентна управляемой линейной системе тогда и только тогда, когда она является дифференциально плоской.

Существенной особенностью такого подхода является возможность описания нелинейной системы посредством плоского выхода и конечного числа его производных. При этом нелинейности системы выражаются через линеаризующие выходы и конечное число их производных, а для плоской системы может быть сформирована динамическая обратная связь, приводящая ее к линейному представлению [55].

Дальнейшее развитие теории представлено в работе Флисс и др. [56], где плоские системы определяются как системы, эквивалентные линейным посредством специального вида эндогенной обратной связи. Авторы рассматривают дифференциальную плоскостность как нелинейное обобщение идеи управляемости и показывают ее связь с динамической линеаризацией обратной связью. Практически важным свойством дифференциально плоской системы является возможность выразить ее переменные состояния и

управляющие воздействия через плоский выход и конечное число его производных. Следовательно, после задания требуемой траектории плоского выхода соответствующие траектории состояния и управления могут быть определены непосредственно, без интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений. Авторы [56] особо отмечают полезность данного свойства при решении задач планирования движения и стабилизации относительно заданных траекторий.

Возможность применения данной концепции непосредственно к многозвенным роботам-манипуляторам исследована в работе Веслин и др. [57]. Авторы рассматривают задачу траекторного слежения как определение управляющих сил в обобщенных координатах, необходимых для перемещения манипулятора по заданной траектории. При этом отмечается, что управление может быть реализовано методами PD с компенсацией гравитации, управление на основе обратной динамики и адаптивного управления.

В работе [57] указывается, что механическая система робота-манипулятора является дифференциально плоской. В качестве плоских выходов могут быть рассмотрены обобщенные координаты манипулятора. При этом положение в обобщенных координатах и соответствующие производные позволяют определить управляющие воздействия, необходимые для обеспечения заданного движения.

Особый интерес для настоящего исследования представляет установленная авторами связь между плоскостностью и методом вычисляемого момента. При рассмотрении полностью приводного n-степенного манипулятора авторы показывают, что его управляющее воздействие может быть представлено как функция плоского выхода и его производных. Полученное выражение авторы непосредственно идентифицируют как метод обратной динамики, определяющий необходимые управляющие моменты для реализации заданного движения манипулятора.

Данное положение имеет принципиальное значение, поскольку позволяет интерпретировать СТС не только как специализированный алгоритм компенсации динамики робота, но и в контексте более общего свойства дифференциальной плоскостности системы.

Для плоской системы задача траекторного управления также существенно упрощается. Поскольку состояния и входные воздействия определяются через плоский выход и конечное число его производных, требуемая траектория может формироваться непосредственно в пространстве плоского выхода, после чего определяются соответствующие управляющие воздействия. В качестве траекторий могут использоваться полиномиальные, тригонометрические и другие достаточно гладкие функции.

Практическая применимость данного подхода для многозвенных промышленных роботов рассмотрена Маркус и др. [58] на примере шестистепенного манипулятора ABB IRB140. Авторами использована полная динамическая модель, полученная методом Ньютона–Эйлера, и разработан регулятор траекторного слежения на основе свойства дифференциальной плоскостности.

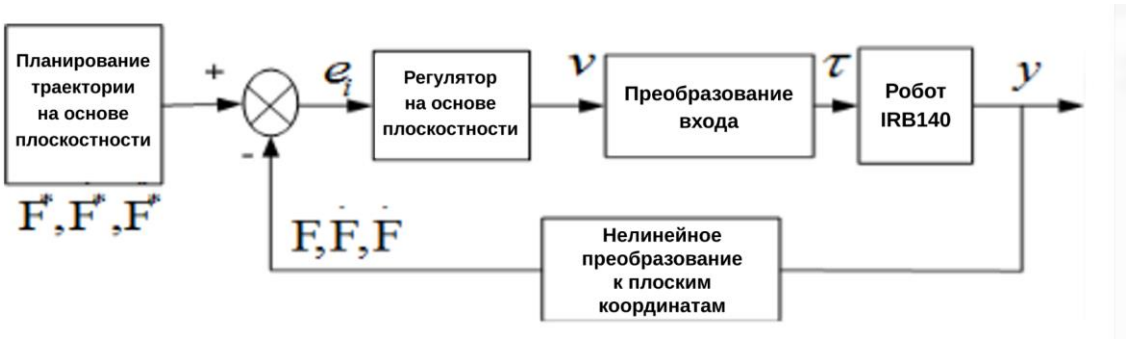


Рисунок 1.6 – Структурная схема траекторного управления промышленным роботом-манипулятором на основе дифференциальной плоскостности

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [58, p. 218]

Как видно из рисунка 1.6, формирование управляющего воздействия осуществляется в преобразованном пространстве, связанном с плоскими выходами системы. Планировщик формирует требуемую траекторию плоского выхода и его производных, которые сравниваются с соответствующими переменными, полученными из фактического движения манипулятора. На основании ошибки слежения регулятор плоскостности формирует промежуточное управляющее воздействие, которое посредством преобразования входа переводится в управляющие моменты, подаваемые на робота. Обратное нелинейное преобразование обеспечивает получение переменных плоского пространства из измеряемого выхода объекта.

Представленная структура показывает, что использование дифференциальной плоскостности позволяет разделить задачу управления на преобразование исходной нелинейной динамики и синтез регулятора для системы более простой структуры. Для полностью приводного манипулятора такое представление связано с возможностью преобразования динамики к тривиальной линейной системе, что упрощает формирование закона траекторного управления. Вместе с тем качество такого преобразования определяется соответствием используемой модели фактической динамике объекта, что обусловливает необходимость дальнейшего исследования робастности системы при наличии параметрических неопределенностей и внешних возмущений. В работе [58] показано, что при подходящем выборе плоского выхода динамическая модель робота с n степенями свободы эквивалентна в смысле Ли–Бэклунда системе интеграторов. Такое линейное представление упрощает планирование траекторий и синтез управления.

Тан и соавторы [59] применили дифференциальную плоскостность к планированию и управлению колёсным мобильным манипулятором. Его кинематическая модель не допускает полной линеаризации статической обратной связью, однако может быть динамически линеаризована при выборе соответствующих плоских выходов. Планирование сводится к построению полиномиальных траекторий в пространстве плоского выхода, а синтез

регулятора к управлению линейной системой. Подход проверен экспериментально на физической установке. При этом, как и в случае СТС, линеаризация номинальной модели не гарантирует робастности к неучтённой динамике и внешним возмущениям.

Фелью-Талегон и соавторы [60] объединили дифференциальную плоскостность с методом активного подавления возмущений (ADRC) для траекторного управления гибким мобильным манипулятором. Использована упрощённая нелинейная модель с эквивалентным жёстким звеном и упругим вращательным сочленением. Эффективность и робастность управления проверены на более детальной конечно-элементной модели.

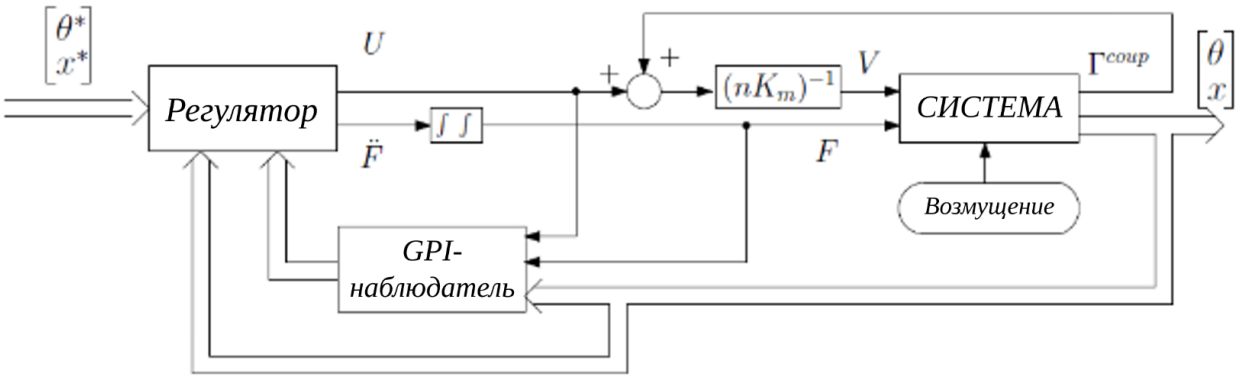


Рисунок 1.7 – Структура системы траекторного управления мобильным манипулятором на основе дифференциальной плоскостности и активного подавления возмущений

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [60, p. 6342]

На рисунке 1.7 показана структура управления, включающая номинальную и робастную составляющие. Свойство дифференциальной плоскостности используется при формировании требуемого траекторного движения, тогда как дополнительный механизм оценивания и компенсации возмущений предназначен для снижения влияния факторов, не учтенных номинальной математической моделью. Такой подход особенно важен для роботов-манипуляторов: приведение номинальной динамики к более простой форме не устраняет влияния параметрических неопределённостей, внешних возмущений и неучтённой динамики.

Выводы по подразделу 1.3:

Обзор 60 источников, выполненный в соответствии с PRISMA и включающий преимущественно журнальные и конференционные статьи из изданий, индексируемых в Web of Science и Scopus, позволил критически оценить современные методы управления многозвенными манипуляторами. Его результаты служат основой для исследования последовательного многозвенного манипулятора как дифференциально плоской системы и анализа метода вычисляемого момента с позиций линеаризации и траекторной эквивалентности.

Выявленная чувствительность модельно-ориентированных методов к неопределённостям определяет основное направление дальнейшего исследования: разработку робастного закона управления преобразованной системой.

Выводы по разделу 1, постановка цели и задач диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту:

Анализ методов управления многозвенными манипуляторами позволил выделить особенности объекта, ограничения существующих подходов и направления дальнейшего исследования.

Последовательный многозвенный манипулятор — нелинейная многосвязная система, динамика которой зависит от конфигурации, массово-инерционных параметров, полезной нагрузки, трения и внешних воздействий. Расхождение между номинальной моделью и реальным объектом обусловливает неопределённости.

Методы на основе обратной динамики и линеаризации обратной связью упрощают траекторное управление за счёт компенсации нелинейностей. Качество компенсации зависит от точности модели.

Метод вычисляемых моментов реализует такую компенсацию, но чувствителен к параметрическим неопределённостям, погрешностям модели и внешним возмущениям.

Перспективным направлением является исследование динамики полностью приводного манипулятора через плоские выходы и установление связи управления на основе дифференциальной плоскостности с линеаризацией обратной связью и СТС.

Дальнейшая работа направлена на математическое описание динамики последовательного многозвенного манипулятора с силовым управлением и исследование его структурных свойств с позиций дифференциальной плоскостности. Предстоит определить условия преобразования нелинейной динамики посредством обратной связи в эквивалентную линейную систему и установить связь этого преобразования с СТС.

Затем необходимо оценить влияние параметрических неопределённостей, погрешностей модели и внешних возмущений на линеаризацию и точность слежения. На этой основе планируется разработать нелинейный робастный закон управления преобразованной системой, установить условия устойчивости замкнутой системы и сходимости ошибки слежения, а также сравнить разработанный метод с классическим СТС.

Цель исследования: разработка и исследование нелинейного метода траекторного управления многозвенным роботом-манипулятором, обеспечивающего повышение точности и робастности системы при наличии параметрических неопределенностей, погрешностей математической модели и внешних возмущений.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Последовательный робот-манипулятор как дифференциально плоская система управления особого типа; обобщенный метод вычисляемых моментов и линеаризация системы управления манипулятором.

2. Геометрическая интерпретация динамики манипулятора и линеаризация статической обратной связью.

3. Нелинейный робастный закон траекторного управления роботом-манипулятором, основанный на линеаризации обратной связью и компенсации неопределенностей математической модели.

Проведенный анализ современного состояния методов управления многозвенными роботами-манипуляторами позволил выполнить первую задачу диссертационного исследования и сформировать теоретическую основу для последующего обоснования научных положений, выносимых на защиту. Основные результаты анализа современных методов нелинейного и адаптивного управления роботами-манипуляторами отражены в обзорных публикациях автора [61, 62].

2 Дифференциальная плоскостность многозвенного робота-манипулятора и обобщенный метод вычисляемых моментов

2.1 Математическая модель динамики двухзвенного манипулятора

Современные исследования динамики робототехнических систем подтверждают необходимость согласованного учёта инерционных параметров звеньев и действующих обобщённых сил. В работе [63] рассмотрены вопросы идентификации параметров и оценивания сил манипулятора на основе модели многотельной механической системы. Это подтверждает целесообразность использования энергетического подхода при построении математической модели динамики последовательного манипулятора.

Для исследования методов траекторного управления в диссертационной работе рассматривается плоский двухзвенный последовательный робот-манипулятор с вращательными сочленениями, схема которого представлена на рисунке 2.1. Выбор двухзвенной структуры позволяет сохранить основные свойства многозвенной механической системы: нелинейность, динамическую взаимосвязь обобщенных координат и зависимость динамических характеристик от текущей конфигурации и одновременно получить аналитические выражения, удобные для исследования свойств системы управления и последующего компьютерного моделирования.

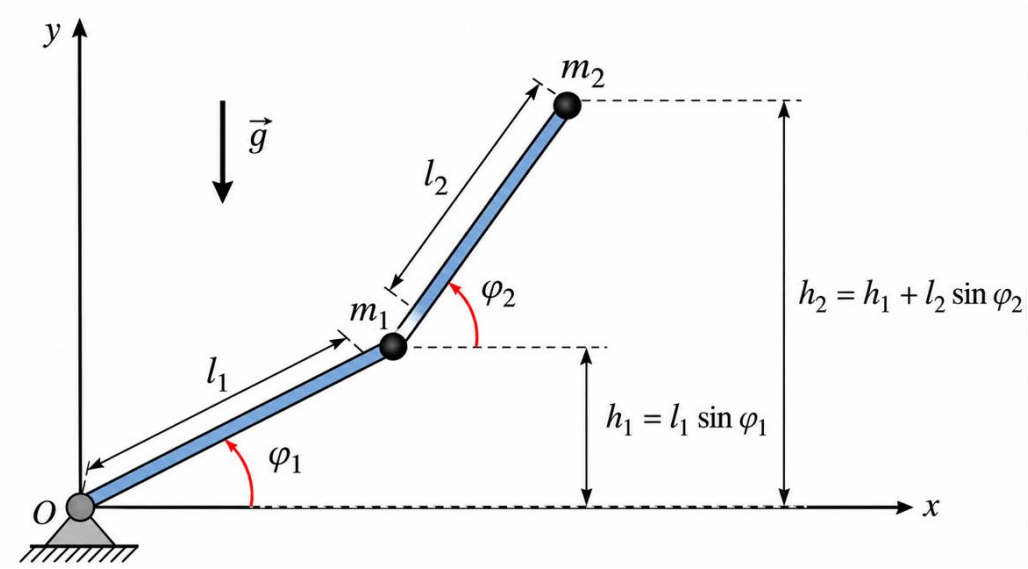


Рисунок 2.1 – Схема робота манипулятора с двумя вращательными звеньями

Потенциальная энергия манипулятора U выражается формулой (2.1).

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \tag{2.1}$$

При этом, как видно из рисунка 2.1 высота (2.2), (2.3):

$$h_1 = l_1 \sin\varphi_1 \tag{2.2}$$

$$h_2 = h_1 + l_2 \sin \varphi_2 \tag{2.3}$$

Таким образом, потенциальная энергия нашего манипулятора будет функцией переменных состояния φ_1 и φ_2 (2.4):

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = \big((m_1 + m_2) l_1 g\big) \sin \varphi_1 + (m_2 l_2 g) \sin \varphi_2 \tag{2.4}$$

Кинетическая энергия T двухзвенного манипулятора, вся масса звеньев которого сосредоточена в концах звеньев определяет как (2.5):

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{2.5}$$

С термом $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ все совсем просто: $|\boldsymbol{v}_1| = l_1 \omega_1$, где $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ угловая скорость первого (нижнего на нашем рисунке) звена манипулятора с длиной l_1 и массой m_1.

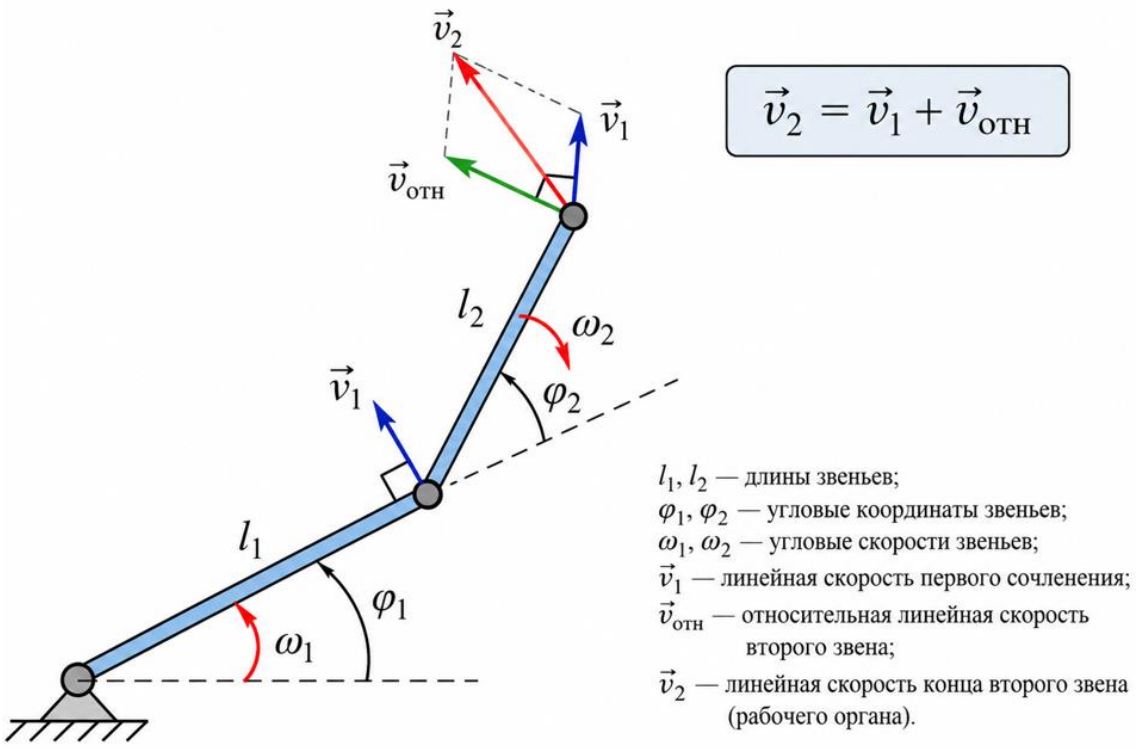


Рисунок 2.2 – Кинематическая схема двухзвенного манипулятора

Вектор скорости конца второго стержня (звена манипулятора длиной l_2) $\boldsymbol{v}_2$ можно найти как сумму $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, где $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ вектор скорости конца второго звена в подвижной системе отсчета, движущейся (в мировой системе отсчета) с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_1$ (т.е. $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ относительная скорость). В такой (инерциальной) подвижной системе отсчета угловые скорости вращения звеньев будут совпадать с их угловыми скоростями в неподвижной системе координат [64]. Поэтому $|\boldsymbol{v}_{\text{отн}}| = l_2 \dot{\varphi}_2$. Угол α между векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ как видно из

рисунка, это просто разность между углами φ_2 и φ_1, т.е. $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. С учетом всего этого получаем (2.6):

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{\text{отн}})^2 = |\boldsymbol{v}_1|^2 + 2|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_{\text{отн}}| \cos\alpha + |\boldsymbol{v}_{\text{отн}}|^2 \quad (2.6)$$

Подставляя в эту формулу полученные выше выражения для модулей скоростей через угловые скорости и углы (2.7) найдем:

$$\boldsymbol{v}_2^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\, cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_2^2\dot{\varphi}_2^2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 \quad (2.7)$$

Подставив это выражение в формулу для кинетической энергии, мы получаем следующую формулу для зависимости кинетической энергии манипулятора T зависит только от переменных состояния (углов φ_1и φ_2 и их производных по времени - угловых скоростей $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$).

$$T(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.8)$$

Соответственно, для функции Лагранжа $L = T - U$ мы получаем следующее выражение (2.9):

$$\begin{aligned} L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \\ = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - \big((m_1 + m_2)l_1g\big)\, sin\,\varphi_1 - (m_2l_2g)\, sin\,\varphi_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения Лагранжевой динамики для нашей модели двухзвенного манипулятора имеют вид системы двух уравнений (2.10):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \tau_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \tau_2 \end{cases}, \quad (2.10)$$

где τ_1 и τ_2 крутящие моменты генерируемые приводами первого и второго звеньев манипулятора соответственно. Непосредственным вычислением получим следующие три формулы (2.11).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \big((m_1 + m_2)l_1g\big)\cos\varphi_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \\ - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$

Аналогично, для переменных φ_2 и $\dot{\varphi}_2$ также прямым вычислением находим (2.12):

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_2 g \cos\varphi_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\, cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\, sin(\varphi_1 - \\ \varphi_2)\,(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{gathered} \tag{2.12}$$

Теперь мы можем записать уравнения Лагранжа нашего манипулятора в виде системы из двух уравнений (2.13):

$$\begin{gathered} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 \\ + m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2\, sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 \\ + \big((m_1 + m_2)l_1 g\big)\, cos\,\varphi_1 = \tau_1 \\ m_2 l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_1 l_2\, sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_2 g\, cos\,\varphi_2 = \tau_2 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Представленные два уравнения можно записать в матричной форме (2.14):

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

где функции $d_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$ и $d_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$ надо рассматривать как компоненты вектора $\boldsymbol{D}(t) = \big(d_1(t), d_2(t)\big), \forall t\, \boldsymbol{D}(t) \in \mathbb{R}^2$. Если мы обозначим вектор конфигурации системы как $\boldsymbol{\theta}(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$, а вектор управления системы как $\boldsymbol{U}(t) = \big(\tau_1(t), \tau_2(t)\big)$, то последнее уравнение можно записать в следующем виде (2.15):

$$M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\big) = \boldsymbol{U} \tag{2.15}$$

Вектор $\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\big)$ удобно представить в виде суперпозиции двух векторов $\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\big) = \boldsymbol{C}\big(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\big) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$ (дело не столько в том, что это упрощает запись, а в том, что такое разделение (которое мы получаем чисто формально) имеет вполне определенный физический смысл – $\boldsymbol{C}$-кориолисова компонента, а $\boldsymbol{G}$ – гравитационная компонента). Мы окончательно получаем уравнение (2.16):

$$M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{U}, \tag{2.16}$$

где

$$M(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2\, sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 \\ -m_2 l_1 l_2\, sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1 g\, cos\, \varphi_1 \\ m_2 l_2 g\, cos\, \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Уравнение (2.16) – это уравнение обратной динамики манипулятора. Задав желаемую траекторию $\boldsymbol{\theta}(t)$ манипулятора в конфигурационном пространстве, а затем рассчитав зависимости $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ и $\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ для заданной нами траектории, мы можем с помощью уравнения (2.16) определить зависимости от времени $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ крутящих моментов в приводах манипулятора, приложение которых (подача на вход управления системы рассчитанного таким методом сигнала управления $\boldsymbol{U}(t)$) приведет к тому, что манипулятор будет двигаться по заданной нами траектории. Для того, чтобы получить уравнения прямой динамики манипулятора, умножим обе части уравнения на обратную к $M(\boldsymbol{\theta})$ матрицу $M^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, мы получим следующее уравнение (2.17):

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = M^{-1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{U} - \boldsymbol{M^{-1}}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})\right) \tag{2.17}$$

Для решения задачи прямой динамики мы будем описывать состояние системы четырехмерным вектором состояния $\boldsymbol{x}(t) = (\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$. Зависимость вектора управления от времени $\boldsymbol{U}(t)$ мы считаем заданной, поэтому уравнение (3.13) мы теперь будем интерпретировать как уравнение (2.18):

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}, t) = M^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}(t) - \boldsymbol{M^{-1}}(\boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\big) \tag{2.18}$$

Тогда мы вполне элементарным образом получаем уравнение прямой динамики манипулятора в виде (2.19):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.19}$$

Представим это уравнение в виде системы из четырех дифференциальных уравнений для каждой из компонент (2.20):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_4 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \ddot{\theta}_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau_1(t), \tau_2(t)) \\ \dfrac{dx_4}{dt} = \ddot{\theta}_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau_1(t), \tau_2(t)) \end{cases} \tag{2.20}$$

Решив задачу обратной динамики, мы можем потом проверить правильность решения с помощью симуляции в MatLab. Для полученной зависимости $\boldsymbol{U}(t)$ и начального условия $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$, которое мы фактически определили, задавая желательную траекторию манипулятора, мы можем численными методами решить уравнение $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, и посмотреть, совпадает ли рассчитанная в ходе симуляции траектория системы с заданной нами. Конечно, для проведения компьютерной симуляции нам нужно получить аналитические выражения для функций $\ddot{\theta}_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau_1(t), \tau_2(t))$ и $\ddot{\theta}_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau_1(t), \tau_2(t))$. Разумеется, эти выражения получаются как результат прямых и элементарных (но несколько громоздких) алгебраических преобразований формулы (2.20). Приведем сразу конечный результат (2.21):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = f_1(x_1, x_2)\big(&\alpha_1\tau_1 \\ &- \beta x_4^2 \sin(x_1 - x_2) - g\cos x_1 - \gamma\cos(x_1 - x_2)\,(\delta_1\tau_2 \\ &+ l_1 x_3^2 \sin(x_1 - x_2) - g\cos x_2)\big) \\ \ddot{\theta}_2 = f_2(x_1, x_2)(&\alpha_2\tau_2 + l_1 x_3^2 \sin(x_1 - x_2) - g\,cos\,x_2 - cos(x_1 - \\ &x_2)(\delta_2\tau_1 + \gamma l_2 x_4^2 \sin(x_1 - x_2 - g\cos x_1))), \end{aligned} \tag{2.21}$$

где функции f_1 и f_2 определены как (2.22) и (2.23):

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{l_1\big(1 - \gamma cos^2(x_1 - x_2)\big)} \tag{2.22}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{l_2\big(1 - \gamma cos^2(x_1 - x_2)\big)} \tag{2.23}$$

Следует отметить, константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ выражаются через параметры манипулятора l_1, l_2, m_1, m_2 следующими равенствами (2.24)-(2.29):

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{m_2 l_1} \tag{2.24}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{m_2 l_2} \tag{2.25}$$

$$\beta = \gamma l_2 \tag{2.26}$$

$$\gamma = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \tag{2.27}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{m_2 l_2} \tag{2.28}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{m_2 l_1} \tag{2.29}$$

Полученная математическая модель описывает нелинейную взаимосвязанную динамику двухзвенного манипулятора и позволяет решать задачи прямой и обратной динамики. При известных параметрах механической системы и заданной траектории движения уравнение обратной динамики используется для определения управляющих моментов, необходимых для реализации требуемого движения [65]. Полученная модель служит основой последующего исследования метода вычисляемых моментов, линеаризации обратной связью и построения замкнутой системы траекторного управления.

2.2 Непрерывные динамические системы и геометрическая интерпретация уравнения динамики систем с управлением

Для описания нелинейных объектов управления и систем с управлением, как устройств, т.е. физических объектов, мы будем использовать математическую модель системы с управлением. Система с управлением как математический объект определяется пространством состояний $\mathcal{X}$, пространством управления $\mathcal{U}$, и уравнением динамики (2.30). В общем случае мы будем рассматривать фазовое пространство системы с управлением $\mathcal{X}$ и ее пространство управления $\mathcal{U}$ как гладкие многообразия конечных размерностей n и m соответственно, т.е. $dim(\mathcal{X}) = n$ и $dim(\mathcal{U}) = m$.

$$\dot{x} = f(x,u)\ x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U} \tag{2.30}$$

В дальнейшем, описывая траектории, мы будем подразумевать отображения вида $\gamma: I \to M$, где $I \subset \mathbb{R}$ интервал действительной оси, а M гладкое многообразие, т.е. мы будем отождествлять траектории с параметрически заданными кривыми $\gamma(t)$, физически интерпретируя параметр t как время, а интервал I - как временной интервал. Траекторией системы с управлением мы будем называть отображение $\gamma: I \to \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, для компонент которого $x_\gamma: I \to \mathcal{X}$ и $u_\gamma: I \to \mathcal{U}$ выполняется условие (2.31).

$$\forall t \in I\ \dot{x}_\gamma(t) = f\left(x_\gamma(t), u_\gamma(t)\right) \tag{2.31}$$

Компоненту x_γ траектории γ мы будем называть траекторией в фазовом пространстве системы, а компоненту u_γ – траекторией в пространстве управления или траекторией управляющего сигнала. Заметим, что если на произвольном временном интервале $I = [0, T]$, задан управляющий сигнал $u(t)$, то любая траектория в пространстве состояний $x(t)$, определенная на интервале I, будет решением задачи Коши (2.32).

$$\begin{gathered} \forall t \in I\ \dot{x} = g(x,t) \\ x(0) = x_0\ , x_0 \in \mathcal{X}' \end{gathered} \tag{2.32}$$

где функция $g(x,t)$ определена равенством (2.33):

$$\forall t \in I, x \in \mathcal{X}\ g(x,t) = f\big(x, u^*(t)\big) \tag{2.33}$$

Таким образом, заданное начальное состояние системы и сигнал управления, заданный на произвольном временном интервале, полностью определяют траекторию системы с управлением на этом временном интервале. Теперь мы можем сформулировать задачу траекторного управления следующим образом: перевести систему с управлением из состояния $x_0 \in \mathcal{X}$, в котором система находилась в начальный момент времени $t = 0$, в заданное терминальное состояние $x_t \in \mathcal{X}$, так, чтобы траектория системы в фазовом пространстве как можно меньше отклонялась от заданной желательной траектории $x_d(t)$. Задача траекторного управления нелинейными системами в общем случае представляет собой сложную задачу, к которой существует множество разнообразных подходов, основанных на радикально отличающихся друг от друга базовых идеях. В рамках представленной работы, мы будем рассматривать исключительно методы траекторного управления особым классом систем с управлением, так называемым плоскими системам с управлением. Теория плоских систем возникла при решении нелинейных задач планирования траектории и траекторного управления, и можно сказать, что класс плоских систем с управлением представлен системами, для которых решение задачи траекторного управления может быть сведено к решению линейных задач. Точное определение понятия “плоская система с управлением” неразрывно связано с фундаментальным для теории автоматического управления понятием траекторной эквивалентности систем с управлением. Современное развитие геометрического подхода к траекторному управлению представлено в работе [66], в которой преобразования, основанные на дифференциальной плоскостности, используются для линеаризации модели мобильного робота и синтеза системы слежения. Рассматриваемая в указанном исследовании структура управления подтверждает практическую значимость разделения задачи на преобразование нелинейной системы и построение регулятора для эквивалентной линейной модели.

Как особый класс дифференциально плоских систем управления, получивший обозначение «системы типа А» в диссертации обозначены системы

управления, плоский выход которых является функцией только переменных состояния системы и не зависит непосредственно от управляющих воздействий и их производных. Впервые такое обозначение было использовано в нашей статье [66], где отмечалось, что к данному классу относится полностью приводной последовательный робот-манипулятор с моментным управлением, для которого в качестве плоского выхода могут быть выбраны обобщённые координаты сочленений. Выделение данного класса имеет существенное значение для решения задачи траекторного управления, поскольку позволяет использовать преобразования статической обратной связи для линеаризации нелинейной динамики. В рамках настоящего исследования данное представление используется для обобщения метода вычисляемых моментов и построения системы траекторного управления многозвенным манипулятором.

Непрерывная динамическая система задается фазовым пространством системы $\mathcal{X}$ и уравнением динамики системы вида (2.34).

$$\dot{x} = F(x)\ x \in \mathcal{X} \tag{2.34}$$

Траекторией динамической системы с фазовым пространством $\mathcal{X}$ и уравнением динамики (2.34), мы будем называть гладкое отображения вида $x: \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$, где $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ луч действительной оси, т.е. мы будем рассматривать траектории как параметризованные кривые в фазовом пространстве, причем мы физически интерпретируем параметр $t \in \mathbb{R}_+$ как время и предполагаем, что любая траектория x удовлетворяет уравнению динамики системы (2.34), т.е. отображение x удовлетворяет условию (2.35).

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ \dot{x}(t) = F\big(x(t)\big) \tag{2.35}$$

Каждой траектории системы соответствует кривая, как геометрическое место точек фазового пространства, которое называют орбитой динамической системы. Орбиту динамической системы можно также назвать пространственной траекторией в фазовом пространстве. Понятие траектории и орбиты следует различать, поскольку множество различных траекторий в фазовом пространстве может соответствовать одной орбите, точно также как одной кривой может соответствовать множество различных параметризаций Траекторию динамической системы можно рассматривать как описание движения воображаемой точки в пространстве $\mathcal{X}$, изменяющееся во времени положение которой описывает текущее состояние динамической системы. Рассмотрим сначала случай, когда пространство состояний $\mathcal{X}$ непрерывной динамической системы представляет собой евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Тогда кинематическая интерпретация траекторий этой системы имеет наглядный характер и ее рассмотрение позволит получить геометрическую интерпретацию уравнения динамики этой системы: введем декартову систему координат на плоскости $\mathcal{X}$. Произвольную кривую с двумя концами на плоскости можно задать параметрически, определив на интервале $[t_0, t_1]$ действительной прямой

две функции $x_\gamma(t)$ и $y_\gamma(t)$ с областью значений $\mathbb{R}$. Будем интерпретировать параметр t как время, а $[t_0, t_1]$ как временной интервал, а значения функций $x_\gamma(t)$ и $y_\gamma(t)$ момент времени $t \in [t_0, t_1]$ как координаты точки, движущейся по плоскости. Положение этой воображаемой точки на плоскости мы будем описывать ее радиус-вектором $\gamma(t) = \left[x_\gamma(t), y_\gamma(t)\right]^T$ $t \in [t_0, t_1]$. Соответственно, для производной по времени $\dot{\gamma}(t)$ справедливо равенство (2.36)

$$\dot{\gamma}(t_p) = V_\text{p}, \tag{2.36}$$

где $t_p \in [t_0, t_1]$ момент времени, для которого выполняется условие $\left[x_\gamma(t_p), y_\gamma(t_p)\right]^T = \left[x_p, y_p\right]^T$ а $V_p = V\left(\left[x_p, y_p\right]^T\right)$. Так как производная $\dot{\gamma}(t_p)$ представляет собой вектор линейного пространства $\mathbb{R}^2$, а через любую точку пространства состояний динамической системы проходит какая-либо из траекторий этой системы, мы можем заключить, что уравнение динамики непрерывной динамической системы определяет векторное поле на плоскости V_p, а траектории системы соответствуют линиям тока этого векторного поля на плоскости. Примером могут служить фазовые портреты систем автоматического регулирования. Заметим, что в самом общем случае, преобразование вида (2.36) трансформирует систему с управлением с пространством состояний $\mathcal{X}$, пространством управления $\mathcal{U}$ и уравнением динамики (2.34), в непрерывную динамическую систему с пространством состояний $\mathcal{X}$ и уравнением динамики $\dot{x} = f\left(x, F(x)\right)$:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.37}$$

$$u = F(x) \tag{2.38}$$

Структурная схема такого преобразования показана на рисунке (2.3).

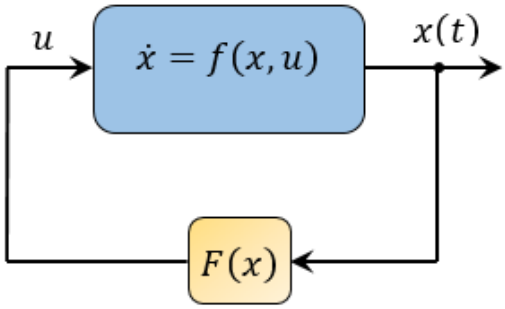


Рисунок 2.3 – Преобразование системы с управлением в непрерывную динамическую систему

Такому преобразованию соответствует схема автоматического регулирования, соответствующая постоянному во времени значению сигнала

задания в системе автоматического управления, структурная схема которой показана на рисунке 2.4.

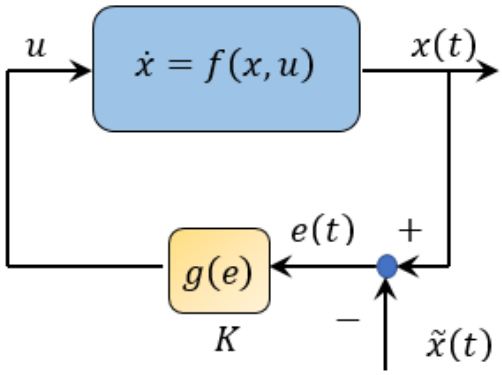


Рисунок 2.4 - Система автоматического управления, в которой роль контроллера K выполняет блок функционального преобразователя. $\tilde{x}(t)$ внешний сигнал задания, $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ – ошибка регулирования

Например, фазовый портрет нелинейной системы регулирования имеет вид, показанный на рисунке 2.5.

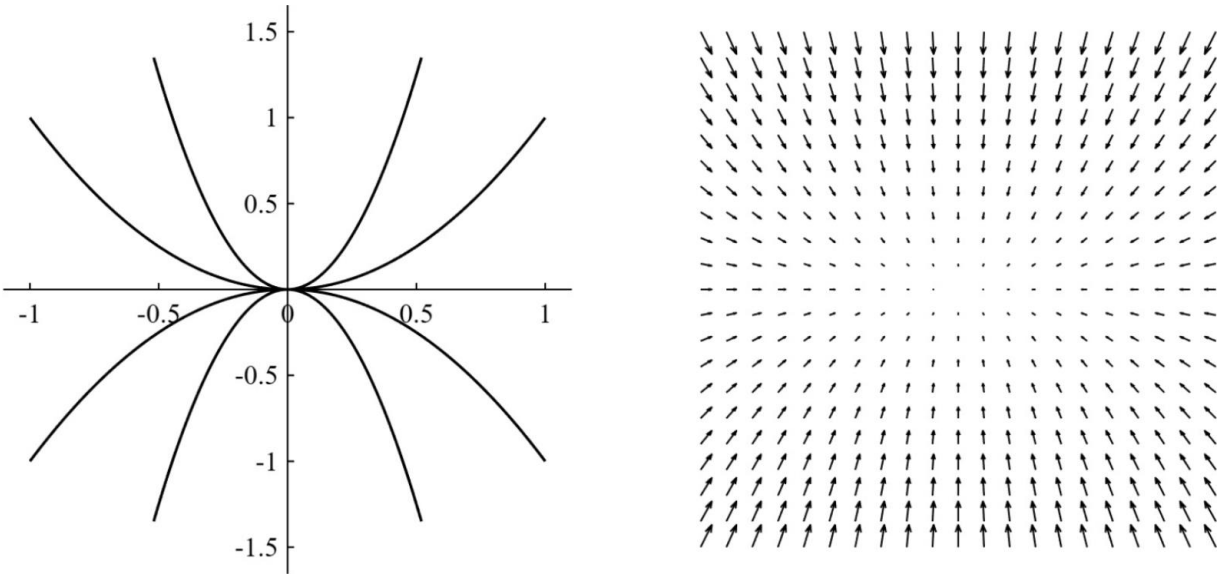


Рисунок 2.5 - Фазовый портрет системы автоматического регулирования (слева). Фазовые траектории представляют собой линии тока векторного поля (справа), описывающего соответствующую непрерывную динамическую систему

В самом общем случае, когда мы описываем пространство состояний динамической системы гладким многообразием, если $I \subset \mathbb{R}$ интервал действительной прямой и $\gamma: I \to \mathcal{X}$ гладкая кривая на $\mathcal{X}$, то по определению $\forall p \in \gamma\ \dot{\gamma}(p) \in T_p(\mathcal{X})$, где $T_p(\mathcal{X})$ касательное пространство многообразия $\mathcal{X}$ в точке p. Таким образом, для динамической системы в любой точки $p \in \mathcal{X}$ определен вектор $F(p) \in T_p(\mathcal{X})$, т.е. на гладком многообразии $\mathcal{X}$ задано касательное

векторное поле F. Произвольное гладкое касательное векторное поле U на $\mathcal{X}$ задает так называемый поток на $\mathcal{X}$. Если $t \in (\varepsilon. -\varepsilon)$ для какого-то $\varepsilon > 0$, то поток, порожденный векторным полем U, который мы будем обозначать как $\phi^t: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ определяется уравнением (2.39)

$$\forall p \in \mathcal{X}\ \phi^t(p) = \gamma_{p,U}(t), \tag{2.39}$$

где $\gamma_{p,U}$ решение задачи Коши (2.40)

$$\gamma_{p,U}(0) = p, \dot{\gamma}_{p,U}(t) = U\big(\gamma(t)\big), \tag{2.40}$$

где $\dot{\gamma}_{p,U}(t)$ вектор, касательный к кривой γ в точке $\gamma(t)$.Как известно из теории обыкновенных уравнений, условия непрерывности и гладкости векторного поля U гарантируют существование и единственность решения задачи Коши (2.40). Кривые γ называют интегральными кривыми касательного векторного поля U, или, как их еще иногда называют линиями тока векторного поля. Таким образом, динамическую систему можно рассматривать как пару $\langle \mathcal{X}, F \rangle$, где $\mathcal{X}$ гладкое многообразие, а F гладкое касательное векторное поле на $\mathcal{X}$, которую называют системой. При этом кривые на многообразии $\mathcal{X}$, соответствующие траекториям динамической системы, представляют собой интегральные линии (линии тока) векторного поля F. Такая геометрическая интерпретация позволяет естественным образом определить понятие эквивалентности динамических систем, имеющее не только геометрический, но и физический смысл. Говоря так, мы подразумеваем, что рассматриваем динамические системы (как и системы с управлением) как математические модели физических систем того или иного рода. При описании физического объекта математической моделью всегда существует определенная свобода в выборе системы координат и один и тот же физический объект допускает множество различных описаний в виде динамической системы, эквивалентных (в обыденном значении этого слова) между собой. Мы хотим найти такой класс преобразования систем, что если преобразование α принадлежит этому классу и преобразование переводит данную систему $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ в систему $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$, т.е. $\alpha(\langle \mathcal{X}, F \rangle) = \langle \mathcal{Y}, G \rangle$, то мы можем считать систему $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ эквивалентной системе $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$, причем результат такой формализации, как минимум, не должен противоречить неформальному определению эквивалентности динамических систем, т.е. два разных описания одной физической системы, должны с необходимостью быть эквивалентными динамическими системами. Это требование, оказывается вполне достаточным для точной формальной формулировки понятия эквивалентности систем. Действительно, не трудно сформулировать требования к отображению $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, которые мы рассматриваем как компонент преобразования α , связывающего эквивалентные системы $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ и $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$. Далее, мы можем интерпретировать отображение гладкого многообразия $\mathcal{X}$, репрезентирующего фазовое пространство динамической системы, описываемой парой $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ в многообразие $\mathcal{Y}$, описывающее, с физической точки зрения то же самое фазовое пространство,

как результат замены координат. Отсюда следует, что преобразование h должно быть биективным (т.е. взаимно-однозначным) отображением. Также мы должны потребовать, чтобы отображения $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и обратное к нему $h^{-1}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ были непрерывными и более того гладким. Напомним, что если многообразия $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ связывает биективное непрерывное отображение $h: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ и обратное к h отображение h^{-1} непрерывно, то многообразия и называются гомеоморфными многообразиями, т.е. топологически эквивалентными друг другу объектами. В том частном случае, когда многообразие соответствует геометрической трехмерной фигуре (когда связное трехмерное многообразие вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$), гомеоморфизмы можно наглядно представлять как деформацию фигуру без разрывов и склеиваний. При таком наглядном представлении становится интуитивно очевидным важный для нас факт, допускающий обобщение на случай произвольных многообразий: гомеоморфизм сохраняет топологические свойства кривых на многообразии. Например, кривая на многообразии с двумя концами и без самопересечений переходит при гомеоморфном преобразовании в кривую с двумя концами не имеющую самопересечений. Если, сверх того, отображение h, задающее гомеоморфизм $h: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ и обратное к нему отображение h^{-1} являются гладкими отображениями, то отображение h называют диффеоморфизмом, а гладкие многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ называют диффеоморфными многообразиями. Подчеркнем, что любая гладкая кривая на многообразии при диффеоморфизме отображается в гладкую кривую, имеющую аналогичное топологическое строений. Любое гладкое отображение гладкого многообразия $\mathcal{X}$ на другое гладкое многообразие $\mathcal{Y}$, индуцирует преобразование множества касательных векторных полей на $\mathcal{X}$ в множество касательных векторных полей на $\mathcal{Y}$. А именно, гладкое отображение $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ определяет в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ линейное отображение касательных пространств $dh_p: T_p\mathcal{X} \to T_{h(p)}\mathcal{Y}$, которое называют дифференциалом отображения h в точке p.

Примечание: Дифференциал dh_p гладкого отображения $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ в произвольной точке $p \in \mathcal{X}$ можно определить тождеством (2.41) верным для любых $X_p \in T_p\mathcal{X}$ и $g \in C^\infty(\mathcal{Y})$. Конечно, в том случае, когда $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$, дифференциал отображения dh определяется Якобианом $\frac{\partial h}{\partial x}$. отображения h, причем $\forall\, p \in \mathcal{X}\ X_p \in T_p\mathcal{X}\ dh_p(X_p) = \frac{\partial h}{\partial x}(p)X_p$, где выражение $\frac{\partial h}{\partial x}(p)X_p$ следует рассматривать как умножение матрицы Якоби $\frac{\partial h}{\partial x}(p)$размерности $m \times n$ на вектор $\dot{x}$ размерности n.

$$dh_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f) \tag{2.41}$$

В том случае, если гладкое отображение $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ задает диффеоморфизм гладких многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$, то в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ линейное преобразование касательных пространств $dh_p: T_p\mathcal{X} \to T_{h(p)}\mathcal{Y}$ является изоморфизмом. Таким образом, диффеоморфизм $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ определяет преобразование системы $\langle \mathcal{X}, F \rangle$

в систему $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$, причем преобразование векторных полей определяется равенствами (2.42), т.е. дифференциал dh задает преобразование касательного векторного поля F на многообразии $\mathcal{X}$ в касательное векторное поле G на многообразии $\mathcal{Y}$, и, аналогично, дифференциал обратного к отображения задает преобразование.

$$\forall p \in \mathcal{X}\ G_{h(p)} = dh_p(F_p) \quad \forall q \in \mathcal{Y}\ F_{h^{-1}(q)} = dh^{-1}(G_q) \tag{2.42}$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению эквивалентности систем:

Определение 1. Две системы $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ и $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$ называются эквивалентными, если существует диффеоморфизм $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, такой, что него выполняются условия (2.42).

Поскольку, как было показано выше, всякой динамической системе однозначно соответствует система, как геометрический объект, представляющий собой гладкое многообразие с заданным на нем векторным полем, определение 1 является так же определением эквивалентных динамических систем. Разумеется, уравнения динамики системы двух эквивалентных систем имеют разный вид. Уравнения (2.42) определяют связь между уравнениями динамики двух эквивалентных динамических систем, связанных диффеоморфными преобразованиями их фазовых пространств. Определим связь между траекториями исходной системы $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ и системы $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$, полученной из $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ преобразованием, индуцированным диффеоморфизмом гладких многообразий $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Для того, чтобы установить связь между траекториями эквивалентных динамических систем мы применим другой подход к выводу уравнений (2.42). Пусть $t \longmapsto x(t)$ траектория системы $\langle \mathcal{X}, F \rangle$.Тогда пользуясь цепным правилом дифференцирования, мы получаем для $\forall t \geq 0$ равенства (2.43).

$$\frac{d}{dt} h\big(x(t)\big) = dh_{x(t)}\big(\dot{x}(t)\big) = dh_{x(t)}\Big(f\big(x(t)\big)\Big) = dh_{x(t)}\big(F_{x(t)}\big) \tag{2.43}$$

Примечание: обычно в литературе по теории автоматического управления предполагается, что $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ и тогда уравнения (2.43) принимают вид (2.44).

$$\tfrac{d}{dt} h\big(x(t)\big) = \tfrac{\partial h}{\partial x}\big(x(t)\big) \cdot \dot{x}(t) = \tfrac{\partial h}{\partial x}\big(x(t)\big) \cdot f(x(t)) \tag{2.44}$$

Существует даже специальный термин, для обозначения отображения $x \longmapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x) \cdot f(x)$, которое иногда называют “производной по времени” отображения h. Представив равенства (2.44) в интегральной форме, мы получим важное свойство траекторий эквивалентных динамических систем, которое мы сформулируем как лемму.

Лемма 1: пусть две эквивалентные системы $\langle \mathcal{X}, F \rangle$ и $\langle \mathcal{Y}, G \rangle$ связаны диффеоморфным преобразованием $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Обозначим как $\varphi^t: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ поток, порожденный векторным полем F на $\mathcal{X}$ и как $\phi^t: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ поток, порожденный векторным полем G на $\mathcal{Y}$. Тогда справедливы тождества (2.45) и (2.46).

$$\phi^t\big(h(p)\big) = h\big(\varphi^t(p)\big) \tag{2.45}$$

$$\forall q \in \mathcal{Y}, t \in \mathbb{R}\ \varphi^t\big(h^{-1}(q)\big) = h^{-1}\big(\phi^t(q)\big) \tag{2.46}$$

Доказательство: зафиксируем произвольную точку $p_0 \in \mathcal{X}$. Кривая $h\big(\varphi^t(p_0)\big)$ на многообразии $\mathcal{Y}$ есть образ кривой $\varphi^t(p_0)$ при отображении h. Для краткости мы будем обозначать эту кривую как γ, т.е. мы определим кривую $\gamma: \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Y}$ тождеством $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \gamma(t) = h\big(\varphi^t(p_0)\big)$, при этом, очевидно $\gamma(0) = h(p_0)$. Продифференцировав выражение $h\big(\varphi^t(p_0)\big)$ по времени, получаем уравнения (2.47):

$$\frac{d}{dt}\, h\big(\varphi^t(p_0)\big) = dh_{\varphi^t(p_0)}\left(\frac{d}{dt}\varphi^t(p_0)\right) = dh_{\varphi^t(p_0)}\left(F\big(\varphi^t(p_0)\big)\right) \tag{2.47}$$

В силу первого из равенств (2.45) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо тождество $dh_{\varphi^t(p_0)}\left(F\big(\varphi^t(p_0)\big)\right) = G\left(h\big(\varphi^t(p_0)\big)\right)$. С учетом этого из уравнений (2.47) следует, что кривая γ является решением задачи Коши (2.48):

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ \dot{\gamma}(t) = G\big(\gamma(t)\big), \gamma(0) = h(p_0) \tag{2.48}$$

Следовательно, кривая γ является линией тока касательного векторного поля G на многообразии $\mathcal{Y}$, и поскольку $\gamma(0) = h(p_0)$ справедливо тождество $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \gamma(t) = \phi^t\big(h(p_0)\big)$. Подставив в это тождество выражение $\gamma(t) = h\big(\varphi^t(p_0)\big)$ мы получим уравнение (2.47) для $p = p_0$. Так как выбор точки $p_0 \in \mathcal{X}$ произволен, тождество (2.47) доказано. Доказательство тождества (2.47) для обратного к h преобразованию $h^{-1}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ полностью аналогично.

Поскольку траектории точек фазовом пространстве динамической системы совпадают с линиями тока векторного поля соответствующей системы, результат леммы 1 допускает более наглядную и удобную для приложений формулировку в терминах траекторий и орбит динамических систем, которую мы приведем ниже.

Пусть динамическая система A с фазовым пространством $\mathcal{X}$ и уравнением динамики $\dot{x} = f(x), x \in \mathcal{X}$ эквивалентна динамической системе B с фазовым пространством $\mathcal{Y}$ и уравнением динамики $\dot{y} = g(y)\,, y \in \mathcal{Y}$. Обозначим как $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ диффеоморфное преобразование, связывающее эквивалентные динамические системы A и B. Пусть $\gamma: \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$ произвольная траектория динамической системы A и $\gamma(0) = p, p \in \mathcal{X}$. Обозначим как $q = h(p), q \in \mathcal{Y}$ образ точки p при отображении h и обозначим как $\delta: \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Y}$ траекторию

системы B, такую, что $\delta(0) = q$. Тогда для траекторий γ и δ справедливы два утверждения:

Утверждение 1: Орбита δ является образом орбиты γ при отображении h, т.е. $h(\gamma) = \delta$. Аналогично, γ это образ орбиты δ при обратном к h отображении $h^{-1}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, т.е. $h^{-1}(\delta) = \gamma$.

Утверждение 2: для траекторий γ и δ справедливы условия (2.49) и (2.50) .

$$\forall t \in R_+ \ \ \delta(t) = h\big(\gamma(t)\big) \tag{2.49}$$

$$\forall t \in R_+ \ \gamma(t) = h^{-1}\big(\delta(t)\big) \tag{2.50}$$

Если мы интерпретируем траекторию динамической системы как описание движения в фазовом пространстве системы воображаемой точки, представляющей текущее состояние системы, то свойство траекторий эквивалентных динамических систем, выраженное утверждением 2.48, допускает наглядное представление (см. рисунок 2.6)

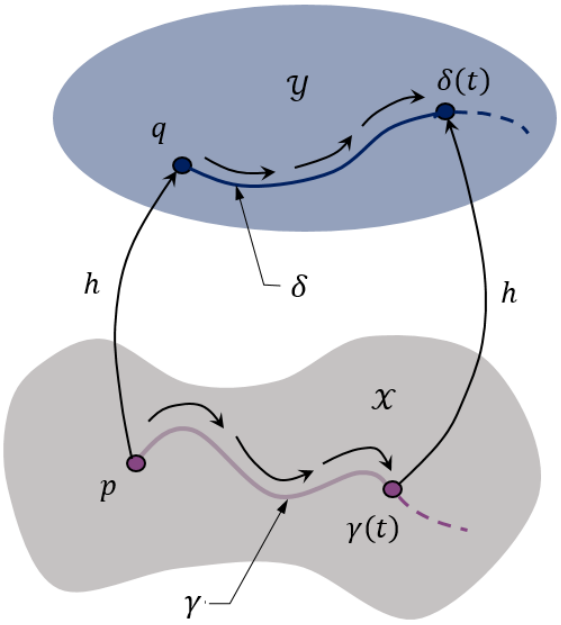


Рисунок 2.6 - Траектории эквивалентных динамических систем с пространствами состояний $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, связанных диффеоморфизмом $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

Таким образом, заданное начальное состояние системы и сигнал управления, заданный на произвольном временном интервале, полностью определяют траекторию системы с управлением на этом временном интервале. Ввиду произвольности выбора начального состояния системы, можно утверждать, что для заданного сигнала управления через любую точку фазового пространства системы проходит одна из возможных (для данного сигнала управления) траекторий в пространстве состояний, Если траектория в фазовом пространстве системы x_γ проходит через некоторую точку $p \in \mathcal{X}$, т.е. $x_\gamma(t_0) = p$ для некоторого момента времени $t_0 \geq 0$, то по определению $\dot{x}_\gamma(t_0) \in T_p(\mathcal{X})$. Соответственно, значение $u(t_0)$ управляющего сигнала в произвольный момент

времени t_0 задает касательное векторное поле F на гладком многообразии $\mathcal{X}$, значение которого в произвольной точке $p \in \mathcal{X}$ определяется равенством $F_p = f\big(p, u^*(t_0)\big)$. Как известно, произвольное гладкое касательное векторное поле U на многообразии $\mathcal{X}$ можно рассматривать как сечение касательного расслоения $T(\mathcal{X})$ гладкого многообразия $\mathcal{X}$, т.е. как отображение $U: \mathcal{X} \to T(\mathcal{X})$. Из сказанного выше следует, что функция f в уравнении динамики (2.34) есть отображение $f: \mathcal{U} \to \big(\mathcal{X} \to T(\mathcal{X})\big)$. В свою очередь, отображение $\mathcal{U} \to \big(\mathcal{X} \to T(\mathcal{X})\big)$ можно рассматривать как результат операции каррирования, примененной к отображению $\mathcal{U} \times \mathcal{X} \to T(\mathcal{X})$, поэтому мы рассматриваем функцию f как отображение $f: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to T(\mathcal{X})$. Поскольку, как мы видели выше, мгновенное значение сигнала управления задает касательное векторное поле на многообразии $\mathcal{X}$, заданному на произвольном временном интервале управляющему сигналу соответствует зависящее от времени векторное поле $F(t)$, значение которого в точке в момент времени определяется очевидным равенством. Изменение состояние системы во времени как движение в фазовом пространстве воображаемой точки, представляющей текущее состояние системы, по линии тока этого изменяющегося во времени векторного поля. Заметим, что в случае динамических систем, мы имеем дело с постоянными векторными полями, а не переменными, как в рассматриваемом нами сейчас случае систем с управлением. Ключевая идея аналогии между динамическими системами с управлением и непрерывными динамическими системами состоит в том, что поведение системы с управлением на ограниченном временном интервале (говоря о “поведение системы с управлением на ограниченном интервале” мы подразумеваем множество траекторий это системы с управлением, заданных на ограниченном временном интервале, и удовлетворяющих определенным, естественным с физической точки зрения, ограничениям) может быть с высокой точностью аппроксимироваться специально сконструированной динамической системой.

Отдельное направление исследований связано с разработкой алгоритмов управления роботами-манипуляторами, оснащенными системами трехмерного сканирования и технического зрения. Соответствующие подходы к построению алгоритмов управления роботизированной рукой рассмотрены в работе [69].

2.3 Координатные преобразования систем с управлением, соответствующие преобразованиям статической обратной связью, и траекторная эквивалентность систем с управлением

Координатные преобразования систем с управлением как математических моделей реальных систем управления, соответствуют физически реализуемым преобразованиям систем управления, как технических систем, осуществляемым с помощью преобразователей сигналов, устройств, действие которых моделируются функциональными операторами, определение которых приведено работах [67, 68]. Задачи применения матричных преобразований и методов линейной алгебры к задачам математического моделирования рассматривались

также в работе [72], посвящённой исследованию управляющей матрицы сингулярного разложения преобразования Радона. Данная работа относится к отдельному направлению математических исследований и демонстрирует применение матричных методов к анализу линейных операторов. Вначале отметим, что сигналами мы будем называть функции вещественного переменного вида $s(t)$, аргумент которых $t \in \mathbb{R}$ физически интерпретируются как время. Пространством сигналов мы будем называть множество отображений вида $s: I \to M$ где $I = [t_0, t_1]$ интервал действительной оси, соответствующий временному интервалу, на котором определены сигналы данного пространства, а M – гладкое многообразие. Поскольку пространство сигналов характеризуются в первую очередь, областью значений M функции $s(t)$, описывающей сигнал, принадлежащий этому пространству, и временным интервалом I, на котором определена функция $s(t)$, мы будем использовать для обозначения пространства сигналов нотацию вида $S_{M.I}$. В этих обозначениях функциональный оператор U, определенный отображением $F: M \to N$, представляет собой отображение $U: S_{M.I} \to S_{N.I}$, заданное формулой (2.51), описывающей результат применения оператора к произвольному сигналу $s \in S_{M.I}$.

$$\forall t \in I \; Us(t) = F\big(s(t)\big) \tag{2.51}$$

Приведем простой пример такого преобразования, для системы с управлением A с пространством состояний $\mathcal{X}$, пространством управления $\mathcal{U}$ и уравнением динамики $\dot{x} = f(x, u)$, Координатное преобразование $y = \mu(x)$, где $\mu: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ заданное отображение гладкого многообразия $\mathcal{X}$ на гладкое многообразие $\mathcal{Y}$, трансформирует систему с управлением A в систему с управлением B с пространством управления $\mathcal{Y}$. Структурная схема соответствующего физически реализуемого преобразования системы управления показана на рисунке 2.7. Эта простая структурная схема составлена в предположении того, что состояние системы с управлением A является наблюдаемой величиной и физическая система, которую описывает система с управлением A имеет выход x, такой, что сигнал $x(t)$ представляет текущее состояние системы с управлением A. Мы можем представить, например, что состояние механической системы представлено шиной аналоговых электрических сигналов сенсоров, установленных на объекте управления. когда компоненты $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ сигнала $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$, поступающего на преобразователь сигналов, физически представляют собой зависимости напряжений от времени. Представим, что объект управления, описываемый системой с управлением A, и преобразователь сигнала (который при сделанных выше предположениях может физически представлять собой электронную схему, формирующую выходной сигнал $y(t)$), имплементирующий функциональный оператор, заданный отображением $\mu: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, помещены в черный ящик с одним входом u и одним выходом y, как показано на рисунке 2.7.

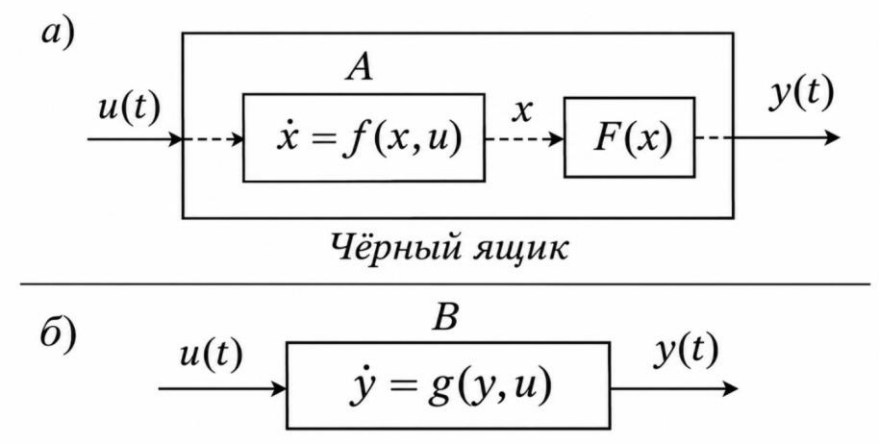


Рисунок 2.7 - Пример координатного преобразования системы с управлением. Структурная схема преобразования системы управления, соответствующая координатному преобразованию $y = F(x)$, математической модели этой системы в виде системы с управлением A (а). Результат преобразования – система с управлением B

С точки зрения внешнего наблюдателя, черный ящик будет представлять собой “преобразователь сигналов с памятью”, преобразующий входной сигнал $u(t)$ в выходной сигнал $y(t)$. В отличии от преобразователей сигналов, описываемых функциональными операторами, результат преобразования $y_\sigma(t)$ входного сигнала $u_\sigma(t)$, заданного на временном интервале I будет определяться не только траекторией входного сигнала, но и начальным состоянием $x_0 \in \mathcal{X}$, в котором находилась скрытая в черном ящике система с управлением A, в начальный момент времени $t = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что отображение $\mu: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, определяющее рассматриваемое координатное преобразование, диффеоморфно, и как следствие для $\mu: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ определено гладкое обратное отображение $\mu^{-1}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Проведем анализ работы полученного в результате координатного преобразования преобразователя сигналов, считая преобразование μ диффеоморфным. Заметим, что траектория $x_\sigma(t)$ в пространстве состояний $\mathcal{X}$ системы с управлением A, определяется начальным состоянием $x_0 \in \mathcal{X}$ и траекторией $u_\sigma: I \to \mathcal{X}$ управляющего сигнала, как решение задачи Коши, для дифференциального уравнения (2.52) и начального условия (2.53).

$$\forall t \in I\ \dot{x}_\sigma(t) = f\big(x_\sigma(t), u_\sigma(t)\big) \tag{2.52}$$

$$x_\sigma(0) = x_0 \tag{2.53}$$

Из определения рассматриваемого координатного преобразования, следует справедливость тождеств (2.54) для любого $t \in I$.

$$y_\sigma(t) = \mu\big(x_\sigma(t)\big) \quad x_\sigma(t) = \mu^{-1}\big(y_\sigma(t)\big) \tag{2.54}$$

Дифференцируя первое из уравнений (2.54) по времени получим уравнение (2.55).

$$\forall t \in I\ \dot{y}_\sigma(t) = d\mu_{x_\sigma(t)}\big(\dot{x}_\sigma(t)\big) \tag{2.55}$$

С учетом второго из тождеств (2.54) $x_\sigma(t) = \mu^{-1}\big(y_\sigma(t)\big)$ перепишем уравнение (2.55) в эквивалентном виде (2.56):

$$\forall t \in I\ \dot{y}_\sigma(t) = d\mu_{\mu^{-1}(y_\sigma(t))}\big(\dot{x}_\sigma(t)\big) \tag{2.56}$$

Подставив в это уравнение выражение для $\dot{x}_\sigma(t)$ (2.56) приходим к уравнению (2.57):

$$\forall t \in I\ \dot{y}_\sigma(t) = d\mu_{\mu^{-1}(y_\sigma(t))}\Big(f\big(x_\sigma(t), u_\sigma(t)\big)\Big) \tag{2.57}$$

Определим отображение $g\colon \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \to (\mathcal{Y} \to T\mathcal{Y})$ уравнением (2.58):

$$\forall y \in \mathcal{Y}, u \in \mathcal{U}\ g(y,u) = d\mu_{\mu^{-1}(y)}\big(f(\mu^{-1}(y), u)\big) \tag{2.58}$$

Тогда уравнение (2.58) можно представить в виде обыкновенного дифференциального уравнения (2.59):

$$\dot{y}_\sigma = g(y_\sigma, u_\sigma) \tag{2.59}$$

При этом траектория выхода результата преобразования $y_\sigma(t)$ будет решением задачи Коши на интервале для дифференциального уравнения (2.59) и начального условия $y_\sigma(0) = y_0$, где $y_0 = \mu(x_0)$. Ввиду произвольности выбора начального состояния $x_0 \in \mathcal{X}$ и траектории сигнала $u_\sigma(t)$, из сказанного выше следует, что результатом рассматриваемого координатного преобразования системы с управлением A будет система с управлением B с пространством состояний $\mathcal{Y}$, пространством управления $\mathcal{U}$ и уравнением динамики (2.60):

$$\dot{y} = g(y.u)\ y \in \mathcal{Y}, u \in \mathcal{U} \tag{2.60}$$

Определим отображение формулами (2.61):

$$\forall x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\ h(x,u) = (\mu(x), u) \tag{2.61}$$

Заметим, что всякая возможная траектория исходной системы с управлением A определяет траекторию системы с управлением B. Рассмотрим преобразование системы с управлением A, заданное уравнениями координатных преобразований (2.62):

$$y = \mu(x) \quad y \in \mathcal{Y}, x \in \mathcal{X}$$
$$u = \rho^{\dagger}(y, w)\, u \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{Y}, w \in \mathcal{W} \tag{2.62}$$

На рисунке 2.8 представлена схема преобразования статической обратной связью.

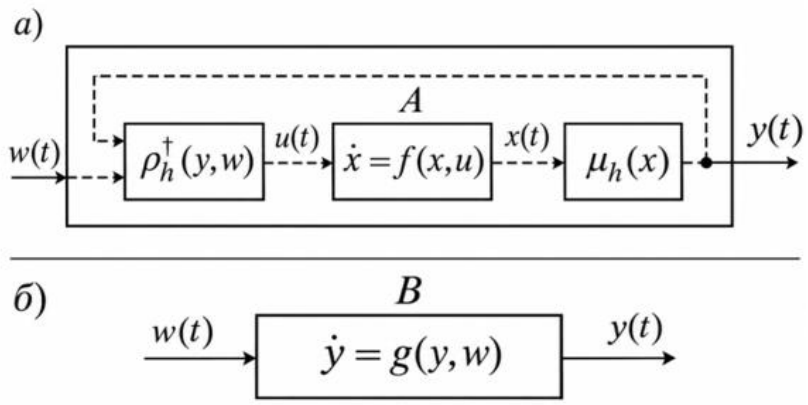


Рисунок 2.8 - Преобразование статической обратной связью, соответствующее координатному преобразованию системы с управлением A, заданному отображениями (а) результат преобразования – система с управлением B.

Обозначим как M декартово произведение двух гладких многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{U}$. Известно, что $M = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ – гладкое многообразие. Пусть $f: M \to M$ диффеоморфное отображение гладкого многообразия M на себя (автоморфизм M). В самом общем случае любой автоморфизм f можно представить в виде декартова произведения отображений (2.63) $f_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ и $f_{\mathcal{U}}: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, которые мы будем называть компонентами автоморфизма f.

$$f = (f_{\mathcal{X}}, f_{\mathcal{U}}) \tag{2.63}$$

Чтобы определить декартово произведение отображений, определим действие декартова произведения на произвольную точку p гладкого многообразия M.Любую точку $p \in M = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ можно единственным образом представить в виде декартова произведения $p = (x_p, u_p), x_p \in \mathcal{X}, u_p \in \mathcal{U}$. С учетом этого определим образ $f(p) \in M$ произвольной точки $p \in M$ при отображении f уравнением (2.64).

$$\forall p \in M\ f(p) = (f_{\mathcal{X}}, f_{\mathcal{U}})(p) = \left(f_{\mathcal{X}}(x_p, u_p), f_{\mathcal{U}}(x_p, u_p)\right) \tag{2.64}$$

В рамках данного исследования нас интересует частный случай, когда автоморфизм $f: M \to M$ представляет собой декартово произведение двух отображений $f = (\mu_f, \rho_f)$, где $\mu_f: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ диффеоморфизм, а $\rho_f: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Обозначим множество автоморфизмов $M = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ такого строения как $\Lambda_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}}$. Для произвольного $g \in \Lambda_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}}\ g = (\mu_g, \rho_g)$, где $\mu_g: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $\rho_g: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Обозначим композицию отображений f и g , $f, g \in \Lambda_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}}$ как $h = f \circ g$. Тогда по

определению $\forall p \in M\ h(p) = f\big(g(p)\big)$. Докажем, что $h \in \Lambda_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}}$. Для этого зафиксируем произвольную точку $p = \big(x_p, u_p\big) \in M$ и вычислим компоненты $x_q \in \mathcal{X}$ и $u_q \in \mathcal{U}$ образа точки p при отображении $g: M \to M$, пользуясь тождествами (2.65).

$$q = g(p)\,, q = \Big(\mu_g\big(x_p\big), \rho_g\big(x_p, u_p\big)\Big) \tag{2.65}$$

Из выражения (2.65) получим выражения для x_q и u_q (2.66):

$$x_q = \mu_g\big(x_p\big) \quad u_q = \rho_g\big(x_q, u_q\big) \tag{2.66}$$

Затем возьмем выражение для $f(q)$ в виде (2.67):

$$f\big(g(p)\big) = \Big(\mu_f\big(x_q\big), \rho_f\big(x_q, u_q\big)\Big) \tag{2.67}$$

И подставив в тождество (2.67) выражения (2.65) для x_q и u_q получим (2.68):

$$f\big(g(p)\big) = \Big(\mu_f\Big(\mu_g\big(x_p\big)\Big), \rho_f\Big(\mu_f\big(x_p\big), \rho_g\big(x_p, u_p\big)\Big)\Big) \tag{2.68}$$

Как следует из (2.68) для $h(p) = f\big(g(p)\big)$ справедливо тождество вида (2.69):

$$h(p) = \Big(\mu_h\big(x_p\big), \rho_h\big(x_p, u_p\big)\Big), \tag{2.69}$$

где $\mu_h: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ определяется тождеством (2.70):

$$\forall x \in \mathcal{X}\ \mu_h(x) = \mu_f\Big(\mu_g(x)\Big), \tag{2.70}$$

а отображение $\rho_h: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ определяется тождеством (2.71) для образа $\rho_h(p) \in \mathcal{U}$ произвольной точки $p = \big(x_p, u_p\big) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ при отображении ρ_h.

$$\forall p \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}\ \rho_h(p) = \rho_f\Big(\mu_f\big(x_p\big), \rho_g\big(x_p, u_p\big)\Big) \tag{2.71}$$

Таким образом, композицию можно представить в виде декартова произведения отображений $h = (\mu_h, \rho_h)$, где отображение $\mu_h: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ есть композиция отображений $\mu_h = \mu_f \circ \mu_g$ (а значит, отображение $\mu_h: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ диффеоморфно, как композиция двух диффеоморфизмов), а отображение ρ_h определяется компонентами отображений согласно равенству (2.71). Следовательно, $h \in \Lambda_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}}$ (по определению множества отображений $\Lambda_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}}$), что эквивалентно утверждению (2.72).

$$\forall f, g \in \Lambda_{X \times U}\ f \circ g \in \Lambda_{X \times U} \qquad (2.72)$$

Таким образом, преобразования статической обратной связью образуют замкнутый относительно композиции класс координатных преобразований систем с управлением. Каждое из них устанавливает взаимно однозначное соответствие между траекториями исходной и преобразованной систем. Это позволяет рассматривать метод вычисляемых моментов как частный случай такого преобразования. Нелинейный регулятор СТС формирует управляющее воздействие как функцию текущего состояния объекта и нового управляющего сигнала, не изменяя координат состояния. В результате нелинейный объект переходит в траекторно эквивалентную ему тривиальную линейную систему с управлением. Задача траекторного управления нелинейным объектом тем самым сводится к синтезу линейного регулятора для эквивалентной линейной системы. В подразделе 2.4 этот подход рассматривается в форме обобщенного метода вычисляемых моментов на примере «одномерных» нелинейных механических систем, управляемых обобщенной силой. Там же решается задача синтеза линейного регулятора, обеспечивающего устойчивость системы траекторного управления к воздействию возмущений и сходимость ее выхода к сигналу задания.

2.4 Обобщенный метод вычисляемых моментов и синтез линейного регулятора

Как правило метод СТС рассматривается как метод траекторного управления многозвенным манипулятором. Такое восприятие метода (косвенно отразившиеся в общепринятом названии метода – под “моментами” подразумеваются крутящие моменты, генерируемые приводами, управляющими звеньями последовательного манипулятора) обусловлено как историческими причинами, так и самым распространенным практическим применением этого метода. Однако с более общей точки зрения этот метод можно рассматривать как один из методов управления нелинейными механическими системами, объединенных общей идеей применения инверсной модели объекта управления для построения подходящей системы управления сложным и существенно нелинейным объектом. Для обоснования основного результата, представляемого в данной работе, будет удобно рассмотреть обобщенный метод СТС для управления “одномерными” нелинейными объектами, а затем обобщить полученный результат на случай “n – мерной” нелинейной механической системы (n – звенного последовательного манипулятора). На наш взгляд, такой подход предоставляет два преимущества: во-первых, при рассмотрении на относительно простом примере появляется возможность четче увидеть основные идеи, лежащие в основе метода СТС и связь этого метода с другими методами нелинейного управления. Во-вторых, одним из объектов к которым напрямую применимы описываемые ниже методы, является однозвенный манипулятор в поле силы тяжести, т.е. мы имеем модельную задачу управления для которой легко проводить компьютерную симуляцию и проводить сравнения с другими методами, оценивать степень влияния возмущений на поведение системы и т.п.

Для реализации изложенной выше программы, мы рассмотрим общий метод СТС на примере задачи траекторного управления нелинейными объектами особого класса. А именно, мы будем рассматривать класс систем с управлением с фазовым пространством $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (или, в общем случае $X = \mathfrak{N} \times \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ гладкие многообразия размерности 1) и пространством управления $\mathcal{U}$, $dim(\mathcal{U}) = 1$ (в дальнейшем мы без всякого ущерба для точности изложения можем считать, что $\mathcal{U} = U \subset \mathbb{R}$), динамика которых описывается системой дифференциальных уравнений (2.73).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu(u) + \varphi(x_1, x_2)' \end{cases} \tag{2.73}$$

где $\mu: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция, для которой определена обратная функция μ^{-1} и $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ произвольная гладкая функция двух переменных. Если мы будем физическим интерпретировать переменные состояния x_1 и x_2 как обобщенную координату и обобщенную скорость (в терминологии Лагранжевой интерпретации механики, то мы можем интерпретировать систему (2.73) как описание одномерной механической системы, управляемой обобщенной силой (т.е. сигнал u в такой интерпретации репрезентирует внешнюю обобщенную силу, посредством котором происходит “позиционное управление” (управление обобщенной координатой y) объектом). В частности, системой уравнений вида (2.73) описывается “однозвенный манипулятор”- простая механической система с управлением, состоящая из тонкого стержня, один из концов которого прикреплен к валу жестко закрепленного электродвигателя, как показано на рисунок 2.9.

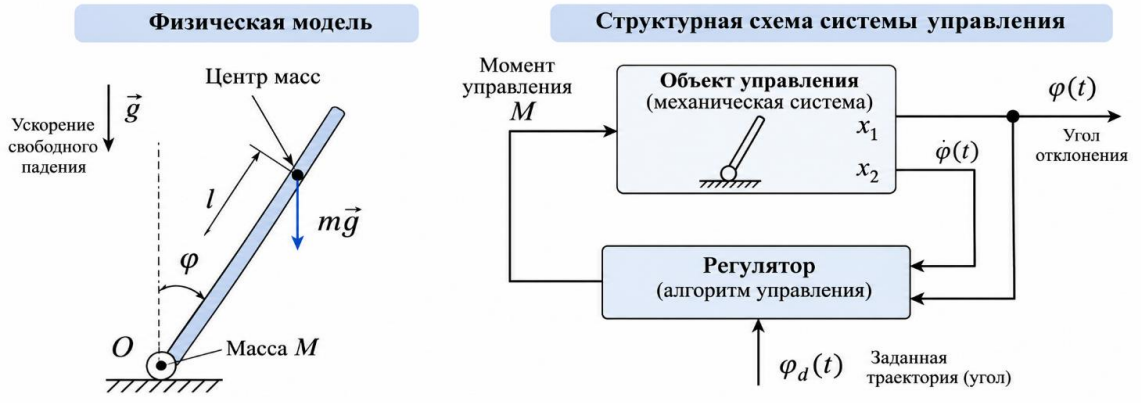


Рисунок 2.9 – Однозвенный манипулятор в поле силы тяжести (слева) и схема траекторного управления однозвенным манипулятором (справа). $\varphi_d(t)$ желательная зависимость угла $\varphi(t)$ от времени

Ось вала, перпендикулярная плоскости рисунка, проецируется в точку O плоскости рисунка. Под действием моментов сил тяжести и крутящего момента, создаваемого электродвигателем, стержень может вращаться относительно оси O, при этом стержень всегда остается параллельным плоскости рисунка,

Положение стержня мы будем описывать углом φ, который составляет ось стержня с вертикалью. Тогда эволюция системы во времени описывается нелинейным дифференциальным уравнением (2.74).

$$I_o\ddot{\varphi} = M + mgl\sin\varphi, \tag{2.74}$$

где I_o момент инерции стержня относительно оси O, m- масса стержня и l – расстояние от центра тяжести стержня до вала привода. Будем полагать, что зависимость крутящего момента привода от времени $M(t)$ задана или M является неявной функцией от времени (как это будет при использовании статической или динамической обратной связи в системе управления, генерирующей сигнал M). В таком случае, если нам для произвольного момента времени t_0 известны текущие значения угла $\varphi(t_0)$, который ось стержня составляет с вертикалью и угловой скорости стержня $\dot{\varphi}(t_0)$, то мы можем предсказать состояние системы в произвольный момент времени $t > t_0$, решив задачу Коши для уравнения (2.73) и начальных значений $\varphi(t_0)$ и $\dot{\varphi}(t_0)$, Таким образом, состояние системы описывается текущими значениями $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$, т.е. вектором состояния системы $\boldsymbol{x}(t)$ определенного как $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \dot{\varphi}(t)\end{pmatrix}$. Фазовое пространство такой системы представляет собой, строго говоря, гладкое многообразие $X = S^1 \times \mathbb{R}$. (при этом мы полагаем, что стержень может свободно сделать полный оборот вокруг своей оси). Теперь заметим, что если мы обозначим $\varphi(t)$ как $x_1(t)$, угловую скорость $\dot{\varphi}(t)$ как x_2 и зависимость момента, генерируемого приводом от времени $M(t)$ как $u(t)$ (этим мы подчеркиваем, что рассматриваем $M(t)$ как сигнал управления), то уравнение (2.74) эквивалентно системе дифференциальных уравнений (2.75) типа (2.73). (Очевидно, что для функции вида $\varphi(u) = ku$, для любого действительного $k \neq 0$ (а $\frac{1}{I_0} \neq 0$) определена обратная функция $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{k}x$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{1}{I_0}\right)u + \left(\frac{mg}{I_0}\right)\sin x_1 \end{cases} \tag{2.75}$$

Точно также как и для рассмотренного выше частного случая однозвенного манипулятора, поведение системы, описываемой системой уравнений типа (2.72) детерминировано начальными значениями $x_{10} = x_1(0)$ и $x_{20} = x_2(0)$, если функция $u(t)$, описывающая управляющий сигнал, определена на луче действительной прямой $t = (0, \infty)$. Мы хотим построить систему траекторного управления нелинейными механическими объектами, описывающихся системой дифференциальных уравнений вида (2.72). Нам нужен контроллер управления, на вход которого поступает сигнал задания $\bar{y}(t)$, представляющий собой желательную зависимость $x_1(t)$ обобщенной координаты, описывающей состояние объекта, от времени, а на выходе которого формируется управляющий сигнал $u(t)$. В дальнейшем мы будем считать, что

“внутренним” переменным состояния объекта x_1 и x_2 соответствуют “внешние” наблюдаемые (и доступные для контроллера управления) сигналы $y(t) = x_1(t)$ и $\dot{y}(t) = x_2(t)$. Разумеется, мы хотим спроектировать контроллер управления так, чтобы выход объекта $y(t)$ возможно более точно соответствовал заданию $\bar{y}(t)$ (отметим, что для объектов управления, описываемых системой дифференциальных уравнений вида (2.72) заданной зависимости $x_1(t)$ однозначно соответствует траектория в фазовом пространстве точки, представляющей текущее состояние системы). Мы будем называть траекторию $\bar{y}(t)$ согласованной с объектом управления, если для этой траектории выполняются равенства. $x_{10} = \bar{y}_0$ и $x_{20} = \dot{\bar{y}}_0$. Везде в дальнейшем, если специально не оговаривалось нечто иное, мы будем считать задание согласованным с объектом управления. Теперь рассмотрим систему траекторного управления, схема которой изображена на рисунке 2.10.

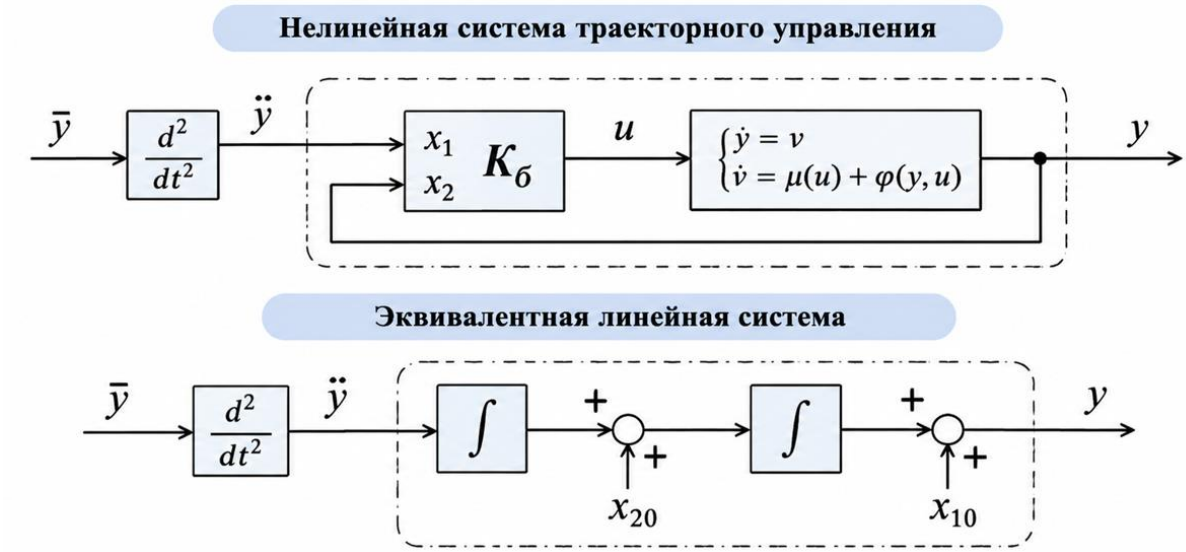


Рисунок 2.10 – Схематическое изображение нелинейной системы траекторного управления нелинейными объектами управления, описываемыми уравнениями вида (2.74) (сверху), эквивалентная линейной системе (внизу)

Символом K_σ на этой схеме обозначен нелинейный контроллер, который представляет собой нелинейный преобразователь сигналов с двумя входами x_1 (на который подается сигнал $\ddot{y}^*$) и x_2 (на который подается сигнал обратной связи y) и одним выходом u. Аналитически этот нелинейный контроллер описывается уравнением (2.76).

$$u = \mu^{-1}\left(x_1 - \varphi(x_2, \dot{x}_2)\right) \tag{2.76}$$

Заменив в этом выражении $x_1(t)$ на $\ddot{y}^*(t)$ и $x_2(t)$ на $y(t)$ мы получим выражение для входного сигнала $f(t)$ объекта управления в рассматриваемой нелинейной системе траекторного управления в виде (2.77).

$$u(t) = \mu^{-1}\left(\ddot{y}^*(t) - \varphi(y(t), \dot{y}(t))\right) \tag{2.77}$$

Далее, подставив это выражение в систему дифференциальных уравнений (2.74), описывающих объект управления, мы получим тривиальную систему дифференциальных уравнений вида (2.78) для переменных состояния x_1, x_2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\bar{y}} \end{cases} \tag{2.78}$$

Это значит, что рассматривая нелинейная система управления эквивалентна простой линейной системе, структурная схема которой показана на рисунке 2.10. Для анализа линейных систем мы будем применять преобразование Лапласа. Для рассматриваемой сейчас линейной системы с двумя блоками интеграторов, аддитивные составляющие x_{10} (начальное значение обобщенной координаты) и x_{20} (начальное значение обобщенной скорости мы будем представлять не константными функциями, а функциями $x_{10}\eta(t)$ и $x_{20}\eta(t)$, где $\eta(t)$ функция Хэвисайда. Как известно, если для гладкой функции $f(t)$ определено преобразование Лапласа $F(s) = \mathfrak{L}\big(f(t)\big)$, то изображение второй производной этой функции определяется тождеством $\mathfrak{L}\left(\ddot{f}(t)\right) = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$. Кроме того, для произвольного сигнала $f(t)$, для которого определено преобразование Лапласа $F(s) = \mathfrak{L}\big(f(t)\big)$ справедливо тождество $\mathfrak{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}F(s)$. С учетом двух этих фактов легко найти связь между изображениями сигнала задания $\bar{Y}(s) = \mathfrak{L}\big(\bar{y}(t)\big)$ и выхода системы $Y(s) = \mathfrak{L}\big(y(t)\big)$.

$$Y(s) = \frac{1}{s}x_{10} + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}x_{20} + \frac{1}{s}(s^2\bar{Y}(s) - s\bar{y}_0 - \dot{\bar{y}}_0)\right) \tag{2.79}$$

Представим выражение (2.79) в удобной для анализа форме (2.80):

$$Y(s) = \bar{Y}(s) + \frac{1}{s}(x_{10} - \bar{y}_0) + \frac{1}{s^2}(x_{20} - \dot{\bar{y}}_0) \tag{2.80}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа для обеих частей уравнения (2.80), мы получим выражение для выходного сигнала $y(t)$ (2.81):

$$y(t) = \bar{y}(t) + (x_{10} - \bar{y}_0)\eta(t) + (x_{20} - \dot{\bar{y}}_0)t \tag{2.81}$$

В том случае, если сигнал задания согласован с системой, т.е. если выполняются равенства $x_{10} = \bar{y}_0$ и $x_{20} = \dot{\bar{y}}_0$, выходной сигнал системы $y(t)$ в точности повторяет сигнал задания $\bar{y}(t)$, т.е. имеет место тождество $y(t) = \bar{y}(t)$. Конечно, такая “идеальная” система траекторного управления представляет собой чисто умозрительную конструкцию, построение которой возможно только при принятии нереалистичной модели системы, не учитывающей влияния на ее

работу неконтролируемых внешних воздействий, т.е. не учитывающей влияние возмущений. Мы будем моделировать влияние возмущений аддитивной добавкой шумового сигнала $n(t)$ к входу сигнала задания контроллера управления (см. рисунок 2.11). Проблема заключается в том, что даже в том случае, если амплитуда "аддитивного шума" ограничена, то есть существует такое $\varepsilon > 0$, что $\forall t > 0\ |n(t)| \leq \varepsilon$, и эта амплитуда значительно меньше среднего значения модуля сигнала на выходе драйвера $\overline{|\ddot{y}(t)|}$, то существует ненулевая вероятность того, что через достаточно продолжительное время работы системы t, текущее значение сигнала $y(t)$ будет сильно отличаться от желательного значения $y^*(t)$. Иначе говоря, высока вероятность того, что с течением времени выход системы $y(t)$ будет все дальше отклоняться от сигнала задания $y^*(t)$.

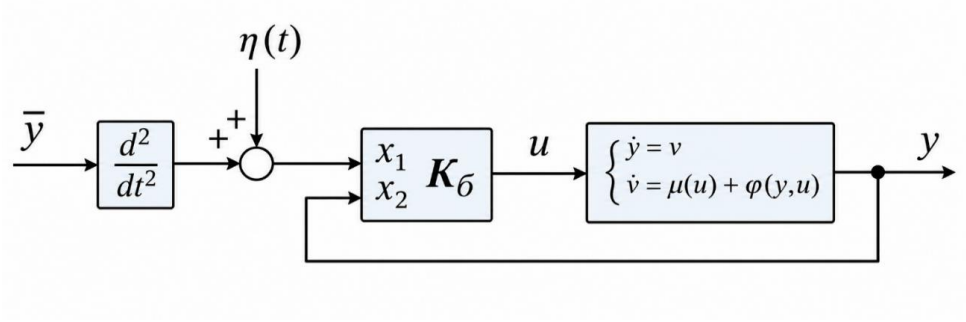


Рисунок 2.11 – Модель системы траекторного управления нелинейным объектом, описываемым уравнениями вида (2.74), учитывающая влияние возмущений. Возмущения моделируются шумовым сигналом $n(t)$ добавляемого к входу задания x_1 нелинейного контроллера управления K_σ

Чтобы нивелировать влияние возмущений необходимо модифицировать схему управления нелинейным объектом. Чтобы понять, как именно следует провести такую модификацию, полезно рассмотреть один частный случай, а именно случай, когда константы интегрирования нелинейного объекта управления равны нулю и сигнал задания согласован с объектом, т.е. выполняются равенства $\bar{y}_0 = x_{10} = 0$ и $\dot{\bar{y}}_0 = x_{20} = 0$. В таком случае нелинейная система траекторного управления, рассмотренная выше, эквивалентна линейной системе, схема которой показана на рисунке 2.12. Легко видеть, что в рассматриваемом частном случае мы имеем дело с системой траекторного управления на основе инверсной модели объекта управления.

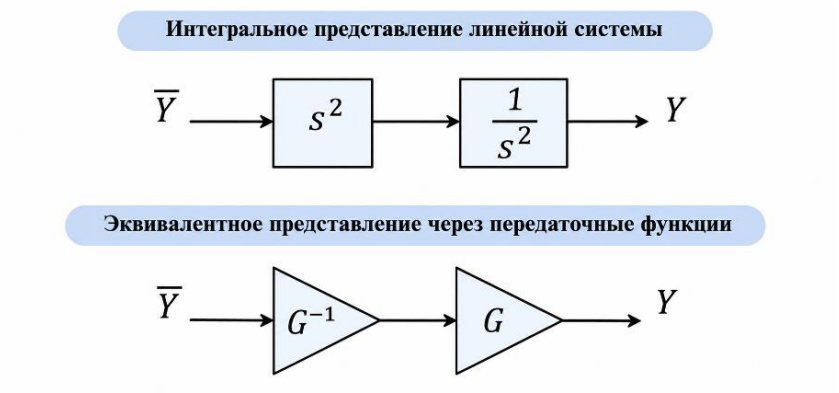


Рисунок 2.12 – Структурные схемы линейной системы траекторного управления, эквивалентной рассматриваемой нелинейной системе управления: представление через операторы дифференцирования и интегрирования (сверху) и эквивалентное представление через передаточную функцию и обратный оператор (снизу).

Линейная система траекторного управления, которой эквивалентна рассматриваемая нелинейная система управления в частном случае $\bar{y}_0 = x_{10} = 0$ и $\dot{\bar{y}}_0 = x_{20} = 0$ (наверху). Это частный случай “идеальной” системы траекторного управления с применением инверсной модели объекта управления (внизу). И в том и в другом случае, выход объекта точно следует за заданием $\forall t \in (0, \infty)\ y(t) = \bar{y}(t)$.

В рассматриваемом частном случае строение эквивалентной линейной системы значительно проще, чем в общем случае. Мы сначала рассмотрим задачу подавления влияния возмущений для этой простой линейной системы, а затем распространим полученные результаты на общий случай. Для нивелирования влияния возмущений, введем в схему управления контур обратной связи с линейным регулятором. Схема такой системы управления показана на рисунке 2.13.

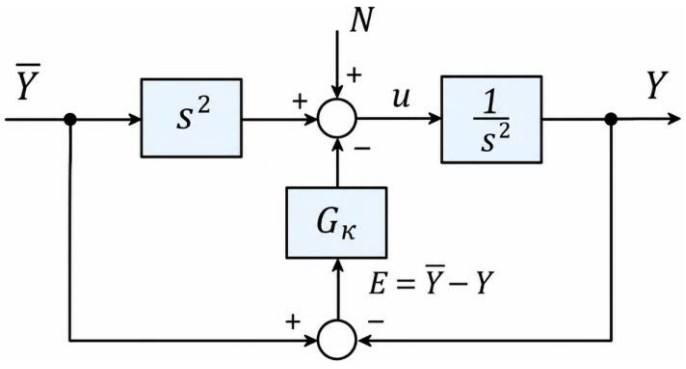


Рисунок 2.13 – Модифицированная схема траекторного управления. В схему добавлен линейный регулятор, с передаточной функцией G_k. На вход регулятора подается сигнал рассогласования $e(t) = \bar{y}(t) - y(t)$. $N(s) = \mathfrak{L}\big(n(t)\big)$ изображение сигнала $n(t)$ представляющего воздействие возмущений на систему управления.

Поскольку схема проста, мы можем проанализировать ее работу самым прямолинейным способом. Изображение $U(s)$ сигнала $u(t)$ на входе объекта управления определяется уравнением (2.82).

$$U = s^2\bar{Y} - G_k(\bar{Y} - Y) + N \tag{2.82}$$

Для изображения выхода объекта управления Y очевидно справедливо равенство $Y = \frac{1}{s^2}U$. Подставив в это уравнение выражение для U (2.82) после проведения элементарных преобразований, получаем уравнение (2.83).

$$(Y - \bar{Y}) - \frac{G_k}{s^2}(Y - \bar{Y}) = \frac{1}{s^2}N \tag{2.83}$$

Уравнение (2.83) эквивалентно выражению (2.84), описывающему связь выходного сигнала $y(t)$ с сигналом задания $\bar{y}(t)$ и сигналом $n(t)$, представляющего влияние возмущений.

$$Y = \bar{Y} + G_{eq}N, \tag{2.84}$$

где G_{eq} функция комплексного переменного, определенной формулой (2.85).

$$G_{eq} = \frac{1}{s^2 - G_k} \tag{2.85}$$

Этот результат допускает интерпретацию, которая позволит нам получить критерий устойчивости рассматриваемой линейной системы к воздействию возмущений. Как не трудно заметить, уравнения (2.84) и (2.85) описывают простую линейную систему, схематически изображенную на рисунке (2.14), которой эквивалентна рассматривая линейная система траекторного управления с линейным регулятором в цепи обратной связи. При этом мы интерпретируем функцию G_{eq} как передаточную функцию воображаемого линейного преобразователя сигнала.

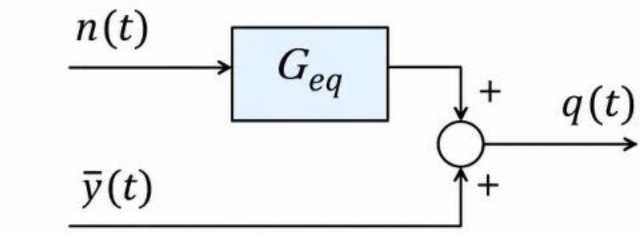


Рисунок 2.14 – Передаточная функция G_{eq} линейного преобразователя, на вход которого подается сигнал $n(t)$ определена уравнением (2.85)

Применим частотный анализ к этой линейной системе. Обозначим как $A_{eq}(\omega)$ амплитудно-частотную характеристику линейного преобразователя сигнала с передаточной функцией G_{eq}. Мы полагаем, что все компоненты Фурье-спектра шумоподобного сигнала $n(t)$ ограничены по модулю (трудно представить себе систему управления, которая могла бы корректно работать в условиях, когда возмущения не удовлетворяют этому требования) и с другой стороны, не вводим никаких предположений о распределении мощности частотных компонент в спектре $n(t)$ (тогда, в частности, возмущения могут моделироваться белым шумом). Требование устойчивости системы к воздействию возмущений эквивалентно требованию ограниченности по модулю аддитивной компоненты $\mathfrak{L}^{-1}(G_{eq}N)$ выходного сигнала $y(t)$. Если спектр входного сигнала линейного преобразователя ограничен по модулю (как мы полагаем), то последнее требование эквивалентно условию (2.86), налагаемому на АЧХ преобразователя A_{eq}.

$$\forall\omega \in [0,\infty)\ A_{eq}(\omega)\ < 1 \tag{2.86}$$

С учетом уравнения (2.85) мы получаем формулу (2.87) для АЧХ линейного преобразователя в эквивалентной схеме.

$$A_{eq}(\omega) = \left|G_{eq}(i\omega)\right| = \frac{1}{|G_k(i\omega) + \omega^2|} \tag{2.87}$$

Теперь мы можем сформулировать критерий устойчивости рассматриваемой системы траекторного управления к воздействию возмущений, как условие (2.88), налагаемое на передаточную функцию G_k линейного регулятора системы.

$$\forall\omega \in [0,\infty)\ |G_k(i\omega) + \omega^2| > 1 \tag{2.88}$$

Чтобы обобщить полученный для частного случая результат, заметим сначала, что формулы (2.84) и (2.85) для рассмотренной линейной системы траекторного управления, нетрудно получить используя принцип суперпозиции, как показано на рисунке 2.15.

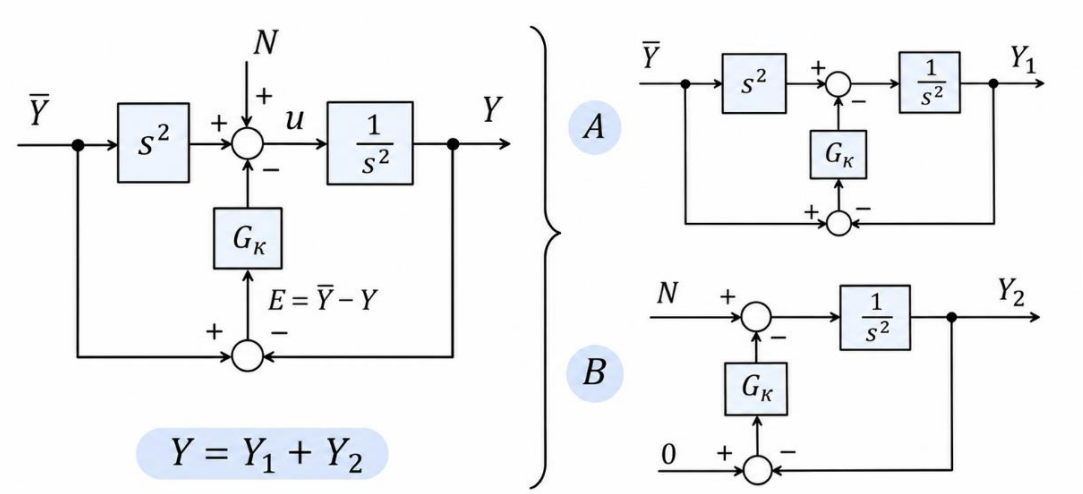


Рисунок 2.15 – Применение принципа суперпозиции для анализа линейной системы траекторного управления (слева). Сначала “отключается” источник сигнала $n(t)$ и определяется отклик $y_1(t)$ системы на входной сигнал задания $\bar{y}(t)$ (схема A справа). Затем “отключается” сигнал $\bar{y}(t)$ и рассчитывается отклик $y_2(t)$ на входной сигнал $n(t)$ (схема B справа).

Следует отметить, первая компонента Y_1 линейной композиции $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$ определяется равенством $Y_1(s) = \bar{Y}(s)$. Проведя элементарные выкладки для схемы B не трудно найти выражение для второй компоненты $Y_2(s) = \frac{N(s)}{s^2 - G_k}$. Используя принцип суперпозиции, мы можем прямо использовать полученные для частного случая результаты к анализу линейной системы управления, эквивалентной модифицированной нелинейной системе управления, схема которой показана на рисунке 2.16.

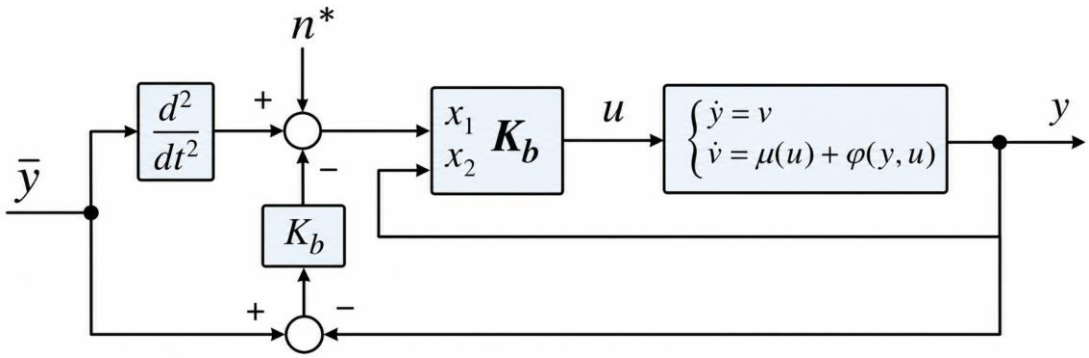


Рисунок 2.16 – Модифицированная схема траекторного управления нелинейным объектом, описывающимся уравнениями вида (2.86). В схему добавлен контур обратной связи с линейным преобразователем сигнала (блок K_L)

На рисунке 2.17 показана схема эквивалентной линейной системы траекторного управления, в удобном для анализа, основанного на применении метода суперпозиции виде.

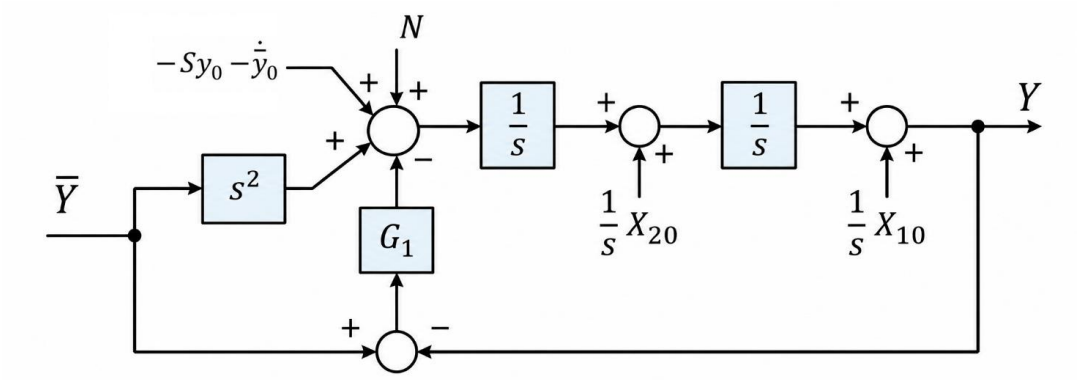


Рисунок 2.17 – Схема линейной системы траекторного управления, эквивалентной нелинейной системе, схема которой показана на рисунке 2.16.

Собственно говоря, для того, чтобы определить связь между изображением выходного сигнала $Y(s)$ и изображением сигнала задания $\bar{Y}(t)$ для этой линейной системы траекторного управления, достаточно провести анализ линейной системы, схема которой указана на рисунке 2.18.

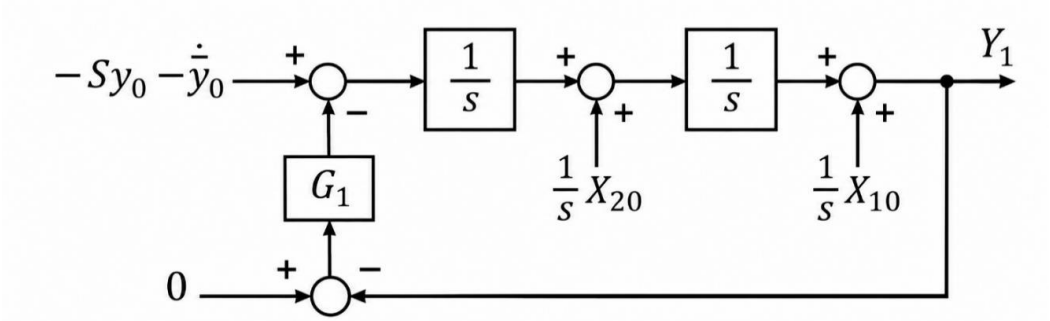


Рисунок 2.18 – Линейная система, соответствующая источнику $-sy_0 - \dot{\bar{y}}_0$, полученная при “отключении” всех остальных источников в системе

Для изображения Y_1 имеем уравнение (2.89), описывающее систему, схема которой изображена на рисунке 2.18.

$$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\left((-s\bar{y}_0 - \dot{\bar{y}}_0) + G_k Y_1\right) + \frac{1}{s}x_{20}\right) + \frac{1}{s}x_{10} = Y_1 \tag{2.89}$$

Путем элементарных алгебраических преобразований уравнение (2.89) можно преобразовать в уравнение (2.90)

$$G_k Y_1 = s^2 Y_1 - (x_{20} - \dot{\bar{y}}_0)s - (x_{10} - \bar{y}_0) \tag{2.90}$$

Это уравнение для изображений можно интерпретировать как определение функции $y_1(t)$: Функция $y_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(Y_1(s)\right)$ является решением дифференциального уравнения (2.91).

$$\ddot{y}_1 - Uy_1 = 0, \tag{2.91}$$

где U линейный оператор, соответствующий линейному преобразователю сигнала K_L в схеме на рисунке 2.18 (Примечание: это означает, что для произвольного сигнала $f(t)$ справедливо тождество $\mathfrak{L}\big(Uf(t)\big) = G_k(s)F(s)$ где $F(s) = \mathfrak{L}\big(f(t)\big)$). Начальные условия задаются равенствами (2.92):

$$\begin{aligned} y_1(0) &= x_{10} - \bar{y}_0 \\ \dot{y}_1(0) &= x_{20} - \dot{\bar{y}}_0 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Применяя принцип суперпозиции к линейной системе, схема которой изображена на рисунке (2.18), с учетом полученных ранее результатов, мы приходим к уравнению (2.93), описывающему поведение системы траекторного управления, где $G_{eq}(s)$ определяется уравнением (2.90), $N(s)$ – изображение по Лапласу функции $n(t)$, описывающей возмущения, действующие на систему.

$$y(t) = \bar{y}(t) + \mathfrak{L}^{-1}\big(G_{eq}(s)N(s)\big) + y_1(t) \tag{2.93}$$

Линейный оператор U, соответствующий линейному преобразователю сигнала K_L, должен стабилизировать дифференциальное уравнение (2.91). Тогда при наличии рассогласования между сигналом задания $\bar{y}(t)$ и объектом управления, система траекторного управления будет работать корректна (с течением времени выход системы $y(t)$ будет стремится к сигналу задания, вне зависимости от степени рассогласования начального состояния объекта управления и сигнала задания).

2.5 Компьютерное исследование траекторного управления на основе СТС

В данном подразделе рассматривается траекторное управление двухзвенным роботом-манипулятором с компенсацией нелинейной динамики методом вычисляемого момента СТС. Сначала устанавливается связь кинематической схемы, энергетического описания и дифференциального уравнения движения. Затем обосновывается выбор линейной обратной связи и исследуется зависимость ошибки слежения от настроек регулятора на модели MATLAB и Simulink.

Вопросы разработки алгоритмов управления роботами-манипуляторами, оснащёнными системами трёхмерного сканирования и технического зрения, ранее рассматривались в работе [69]. В отличие от указанного исследования, в настоящем подразделе основное внимание уделено аналитическому обоснованию и компьютерной проверке траекторного управления на основе метода вычисляемых моментов.

Исследование объединяет математическую модель объекта, ее программную реализацию, аналитическое решение уравнения ошибки, графики слежения и численный отчет. В номинальных условиях результаты нелинейного моделирования согласуются с расчетом. Полученные данные позволяют оценить

характер затухания и время установления при трех настройках регулятора. Исследуется плоский манипулятор с двумя вращательными сочленениями и неподвижным основанием.

Положение звеньев в компьютерной модели задается координатами сочленений q_1 и q_2: q_1 — угол первого звена относительно горизонтальной оси, q_2 — угол второго звена относительно первого. В математической модели подраздела 2.1 использованы абсолютные углы звеньев φ_1 и φ_2, оба отсчитываемые от горизонтальной оси. Координаты двух моделей связаны соотношениями: $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, т.е. q_1 совпадает с φ_1, а q_2 представляет собой относительный угол во втором сочленении; абсолютный угол второго звена равен $q_1 + q_2 = \varphi_2$. Координаты сочленений общеприняты при описании последовательных манипуляторов и непосредственно измеряются датчиками приводов. Поэтому именно они используются в схемах Simulink, программном коде и на графиках результатов; заданные значения координат обозначены q_{1d} и q_{2d}. Состояние модели определяется положениями и скоростями сочленений.

Компьютерная модель учитывает положение центров масс звеньев и их моменты инерции и поэтому обобщает модель подраздела 2.1. Пусть $l_{c1} = l_1$, $l_{c2} = l_2$ и $I_1 = I_2 = 0$, где l_2 — длина второго звена. Тогда кинетическая и потенциальная энергии компьютерной модели после подстановки $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ совпадают с выражениями подраздела 2.1, и уравнения движения обеих моделей эквивалентны. Матрица инерции $M(q)$ и векторы $c(q, \dot{q})$, $g(q)$ при этом по форме отличаются от $M(\theta)$, $C(\theta, \dot{\theta})$ и $G(\theta)$ подраздела 2.1, поскольку записаны в других координатах. По той же причине управляющие моменты τ_1 и τ_2 компьютерной модели — это моменты в сочленениях, соответствующие координатам q_1 и q_2. Обобщенные силы в уравнениях подраздела 2.1, соответствующие абсолютным углам, выражаются через них как $\tau_1 - \tau_2$ и τ_2. Ускорение свободного падения обозначено g_0, поскольку символ g использован для вектора гравитационных составляющих.

$$q = [q_1, q_2]^{\mathrm{T}}, \quad x = [q^{\mathrm{T}}, \dot{q}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{2.94}$$

Заданная траектория qd(t) содержит желаемые угловые координаты. Цель управления состоит в обеспечении сходимости координат модели q(t) к заданию при ненулевом начальном рассогласовании. Ошибка во всех формулах и графиках определяется одинаково:

$$e(t) = q(t) - q_d(t), \quad \dot{e}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) \tag{2.95}$$

Динамическая модель строится на основе кинематики центров масс звеньев. Обозначим массы m_1 и m_2, расстояния от осей сочленений до центров масс l_{c1} и l_{c2}, длину первого звена l_1, моменты инерции относительно центров масс I_1 и I_2. Для принятых угловых координат:

$$r_{c1} = [l_{c1}\, cos\, q_1, l_{c1}\, sin\, q_1]^{\mathrm{T}}, \tag{2.96}$$

$$r_{c2} = [l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \quad l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)]^{\mathrm{T}} \tag{2.97}$$

Скорости центров масс получаются дифференцированием этих координат. Квадраты модулей скоростей имеют вид:

$$\|\dot{r}_{c1}\|^2 = l_{c1}{}^2 \dot{q}_1{}^2 \tag{2.98}$$

$$\|\dot{r}_{c2}\|^2 = l_1{}^2 \dot{q}_1{}^2 + l_{c2}{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos q_2 \, \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \tag{2.99}$$

Полная кинетическая энергия складывается из поступательной энергии центров масс и вращательной энергии звеньев. Угловые скорости звеньев равны $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_1 + \dot{q}_2$ соответственно:

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 \|\dot{r}_{c1}\|^2 + \tfrac{1}{2} I_1 \dot{q}_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \|\dot{r}_{c2}\|^2 + \tfrac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \tag{2.100}$$

После раскрытия скобок энергия представляет собой квадратичную форму относительно обобщенных скоростей:

$$T(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} \dot{q}^{\mathrm{T}} M(q) \dot{q} \tag{2.101}$$

Таким образом, конфигурационно зависимая матрица инерции возникает непосредственно из кинематической схемы и физических параметров звеньев. Она не является произвольной матрицей настройки регулятора.

Потенциальная энергия определяется высотами центров масс в поле тяжести. При ускорении свободного падения g_0:

$$U(q) = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g_0 \sin q_1 + m_2 l_{c2} g_0 \sin(q_1 + q_2) \tag{2.102}$$

В традиционном описании используется лагранжиан L = T − U. Общий принцип вывода уравнений робота из кинетической и потенциальной энергии изложен в [68]. Для рассматриваемого манипулятора вычисления выполняются по указанной выше кинематике, учитывающей распределенную массу и собственные моменты инерции звеньев.

$$d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_{\mathrm{i}}) - \partial L/\partial q_{\mathrm{i}} = \tau_{\mathrm{i}}, \; i = 1, 2 \tag{2.103}$$

Члены, содержащие угловые ускорения, образуют $M(q)\ddot{q}$; квадратичные по скоростям члены объединяются в $c(q, \dot{q})$; производные потенциальной энергии образуют гравитационный вектор $g(q)$. В результате:

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \tag{2.104}$$

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 {l_{c1}}^2 + m_2({l_1}^2 + {l_{c2}}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos q_2) \quad (2.105)$$

$$M_{12} = M_{21} = I_2 + m_2({l_{c2}}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) \quad (2.106)$$

$$M_{22} = I_2 + m_2 {l_{c2}}^2 \quad (2.107)$$

$$c_1 = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \, (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + {\dot{q}_2}^2) \quad (2.108)$$

$$c_2 = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \, {\dot{q}_1}^2 \quad (2.109)$$

$$g_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g_0 \cos q_1 + m_2 l_{c2} g_0 \cos(q_1 + q_2) \quad (2.110)$$

$$g_2 = m_2 l_{c2} g_0 \cos(q_1 + q_2) \quad (2.111)$$

Компьютерная модель учитывает положение центров масс звеньев и их моменты инерции и поэтому обобщает модель подраздела 2.1. Пусть $l_{c1} = l_1$, $l_{c2} = l_2$ и $I_1 = I_2 = 0$, где l_2 — длина второго звена. Тогда кинетическая и потенциальная энергии компьютерной модели после подстановки $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ совпадают с выражениями подраздела 2.1, и уравнения движения обеих моделей эквивалентны. Матрица $M(q)$ и векторы $c(q, \dot{q})$, $g(q)$ при этом по форме отличаются от $M(\theta)$, $C\left(\theta, \dot{\theta}\right)$ и $G(\theta)$ подраздела 2.1, поскольку записаны в других координатах. По той же причине управляющие моменты τ_1 и τ_2 компьютерной модели — это моменты в сочленениях, соответствующие координатам q_1 и q_2, а обобщенные силы в уравнениях подраздела 2.1, соответствующие абсолютным углам, выражаются через них как $\tau_1 - \tau_2$ и τ_2. Ускорение свободного падения обозначено g_0, поскольку символ g использован для вектора гравитационных составляющих.

Закон управления методом вычисляемых моментов включает линейную и нелинейную части. Линейная часть формирует вспомогательное управление, имеющее смысл желаемого ускорения:

$$v = \ddot{q}_d - K_d \dot{e} - K_p e, \quad (2.112)$$

где $K_p = k_p E_2$ и $K_d = k_d E_2$ — матрицы коэффициентов регулятора, E_2 — единичная матрица второго порядка. Нелинейная часть вычисляет управляющие моменты по уравнению обратной динамики:

$$\tau = M(q)\, v + c(q, \dot{q}) + g(q). \quad (2.113)$$

Если параметры, заложенные в регулятор, совпадают с параметрами объекта, подстановка (2.113) в (2.104) дает $\ddot{q} = v$, и с учетом (2.95) ошибка слежения удовлетворяет линейному уравнению

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0. \quad (2.114)$$

Уравнение (2.114) не содержит ни задания $q_d(t)$, ни параметров манипулятора. Поэтому при точной компенсации нелинейной динамики затухание ошибки определяется только коэффициентами регулятора и начальными условиями. При диагональных K_p и K_d уравнение (2.114) распадается на два независимых скалярных уравнения с одинаковым характеристическим уравнением

$$\lambda^2 + k_d\lambda + k_p = 0. \tag{2.115}$$

При $k_d^2 > 4k_p$ корни вещественные и различные, и ошибка затухает апериодически; при $k_d^2 = 4k_p$ корни совпадают, что соответствует критическому режиму; при $k_d^2 < 4k_p$ корни комплексно-сопряженные, и ошибка затухает колебательно. В опытах $k_p = 100$ с$^{-2}$, а k_d принимает значения 30, 20 и 10 с$^{-1}$, что соответствует этим трем режимам.

Структурная схема компьютерной модели приведена на рисунке 2.19. Модель содержит две вычислительные ветви. Основная ветвь формирует управляющие моменты, интегрирует нелинейную динамику объекта и измеряет координаты и ошибку слежения. Вспомогательная ветвь рассчитывает свободное движение ошибки по линейной модели и служит только для сопоставления: на управление объектом она не влияет.

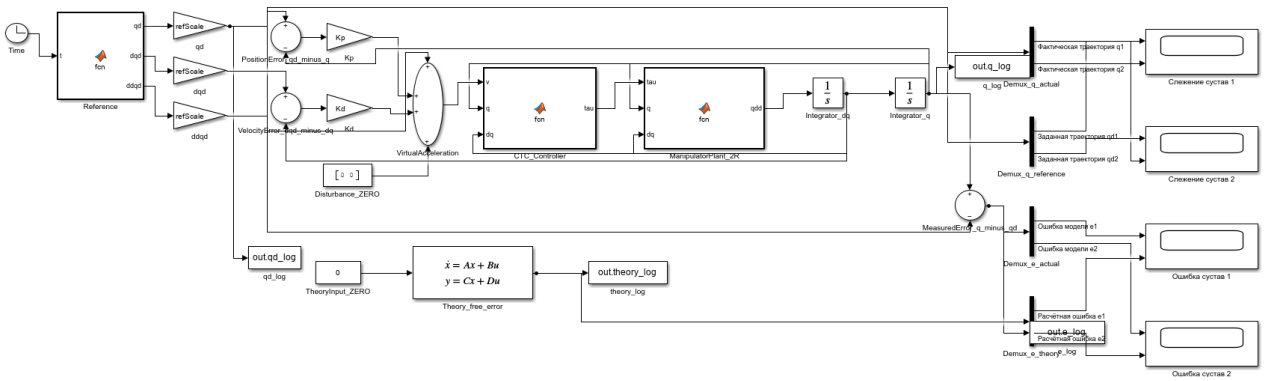


Рисунок 2.19 – Схема нелинейной модели манипулятора с СТС и проверкой ошибки

Блок Clock подает время в генератор задания Reference, который формирует сигналы q_d, $\dot{q}_d$ и $\ddot{q}_d$. Три блока refScale одновременно масштабируют эти сигналы: при refScale = 0 задание неподвижно ($q_d \equiv 0$), при refScale = 1 используется движущееся синусоидальное задание. Сумматоры PositionError_qd_minus_q и VelocityError_dqd_minus_dq вычисляют разности $q_d - q$ и $\dot{q}_d - \dot{q}$, которые после умножения на коэффициенты регулятора поступают вместе с $\ddot{q}_d$ в блок VirtualAcceleration. Поскольку $q_d - q = -e$, положительные входы сумматоров реализуют закон (2.112). Вход возмущения Disturbance_ZERO в данном исследовании равен нулю.

Блок CTC_Controller по сигналам v, q и $\dot{q}$ вычисляет моменты (2.113), а блок ManipulatorPlant_2R по τ, q и $\dot{q}$ независимо вычисляет ускорения из уравнения (2.104). В обоих блоках заданы одинаковые номинальные параметры, что соответствует точной компенсации нелинейной динамики. Интеграторы Integrator_dq и Integrator_q формируют скорости и координаты, замыкающие обратные связи, а блок MeasuredError_q_minus_qd вычисляет ошибку $e = q - q_d$ со знаком, принятым в (2.95).

Вспомогательная ветвь Theory_free_error реализует уравнение (2.114) в пространстве состояний независимо от нелинейного объекта:

$$x_e = [e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2]^{\mathrm{T}}, \ \dot{x}_e = A_e\, x_e \tag{2.116}$$

$$A_e = [0_2\, E_2;\ -k_p\, E_2 - k_d\, E_2], \ x_e(0) = [{e_0}^{\mathrm{T}}, {\dot{e}_0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{2.117}$$

где 0_2 и E_2 — нулевая и единичная матрицы второго порядка, e_0 и $\dot{e}_0$ — начальные значения ошибки и ее производной. Вход этой ветви равен нулю, а начальное состояние совпадает с начальной ошибкой, поэтому она воспроизводит свободное затухание начального рассогласования. Задание начальных условий здесь принципиально: блок передаточной функции с нулевыми начальными условиями давал бы тождественно нулевую расчетную ошибку, и сопоставление потеряло бы смысл.

Независимо от обеих ветвей программа вычисляет аналитические решения уравнения (2.114), не используя измеренную ошибку. На графиках сплошная линия соответствует аналитическому решению, а маркеры — выборке из результатов интегрирования нелинейной модели; различное происхождение данных делает их сопоставление содержательным. Координаты, задание, измеренная и расчетная ошибки сохраняются в журналах q_log, qd_log, e_log и theory_log, поэтому графики и численные таблицы строятся по результатам одного прогона. Результаты записываются в файлы форматов CSV, MAT, PNG и FIG, модель — в файл SLX. Четыре окна Scope отображают слежение и ошибку каждого сочленения непосредственно в Simulink.

Во всех опытах $k_p = 100$ с$^{-2}$, начальные ошибки равны $e_1(0) = 0{,}10$ рад и $e_2(0) = -0{,}08$ рад, начальные производные ошибок равны нулю, шаг интегрирования фиксирован и равен 0,001 с. Движущееся задание имеет вид $q_{d1} = 0{,}30\sin(t + 0{,}20)$, $q_{d2} = 0{,}20\sin(1{,}40t - 0{,}40)$. Начальные значения координат выбираются так, чтобы при обоих видах задания начальная ошибка была одинаковой. Для каждого из трех значений k_d выполнено по два прогона — с неподвижным и с движущимся заданием, т.е. всего шесть основных опытов.

На рисунках 2.20–2.22 показана ошибка слежения в двух сочленениях при трех значениях k_d. На каждом рисунке по горизонтали отложено время, по вертикали — ошибка в радианах; черная линия — аналитическое решение, красные маркеры — ошибка нелинейной модели, пунктир — границы полосы ±2 % от начальной ошибки, по которой определяется время установления.

При $k_d = 30$ с$^{-1}$ корни уравнения (2.115) равны −3,8197 и −26,1803 с$^{-1}$, и ошибка представляет собой сумму двух затухающих экспонент (рисунок 2.20). Ошибка e_1 уменьшается от 0,10 рад до нуля, ошибка e_2 возрастает к нулю от −0,08 рад, и при нулевой начальной производной обе не меняют знак. Быстрая составляющая заметна только в начале процесса, а заключительный участок определяется медленным корнем −3,8197 с$^{-1}$. Поэтому увеличение k_d сверх критического значения не ускоряет, а замедляет установление: время установления первого канала равно 1,066 с.

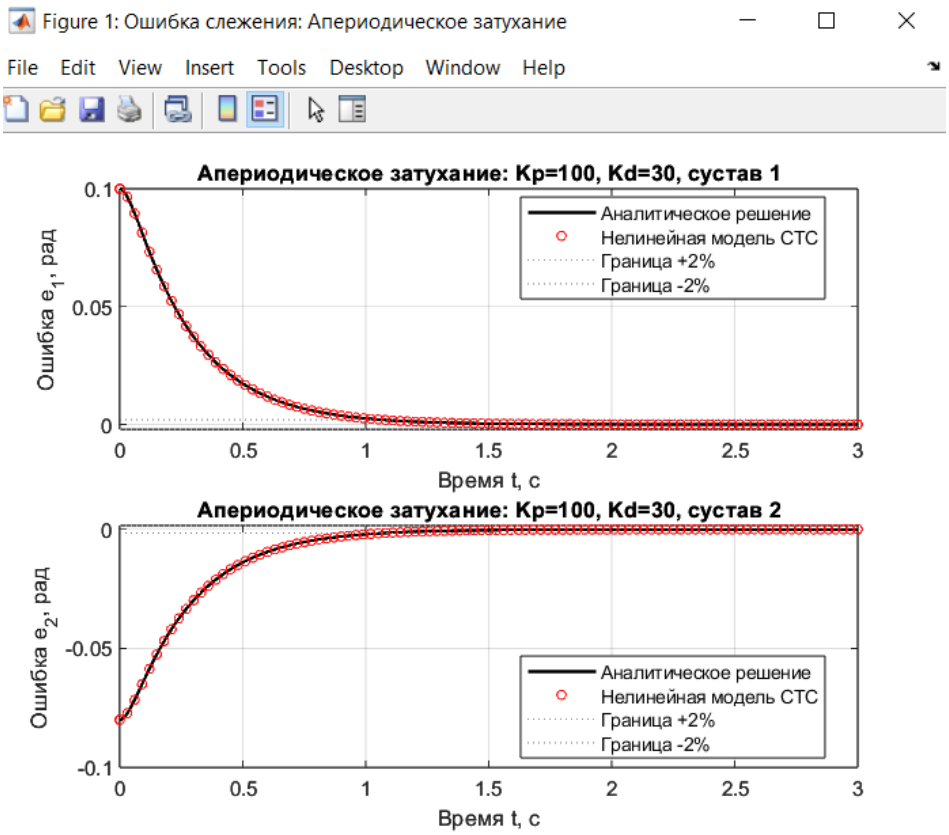


Рисунок 2.20 – Апериодическое затухание ошибки двух сочленений при $k_d = 30$ с$^{-1}$

При $k_d = 20$ с$^{-1}$ уравнение (2.115) имеет двукратный корень −10 с$^{-1}$, что соответствует критическому режиму (рисунок 2.21). Аналитические решения имеют вид $e_1(t) = 0{,}10(1 + 10t)\exp(-10t)$ и $e_2(t) = -0{,}08(1 + 10t)\exp(-10t)$. Ошибки затухают без колебаний и смены знака и входят в полосу ±2 % быстрее, чем в двух других опытах: время установления первого канала равно 0,584 с. Этот результат относится к принятым начальным условиям и критерию ±2 % и не является решением задачи оптимизации.

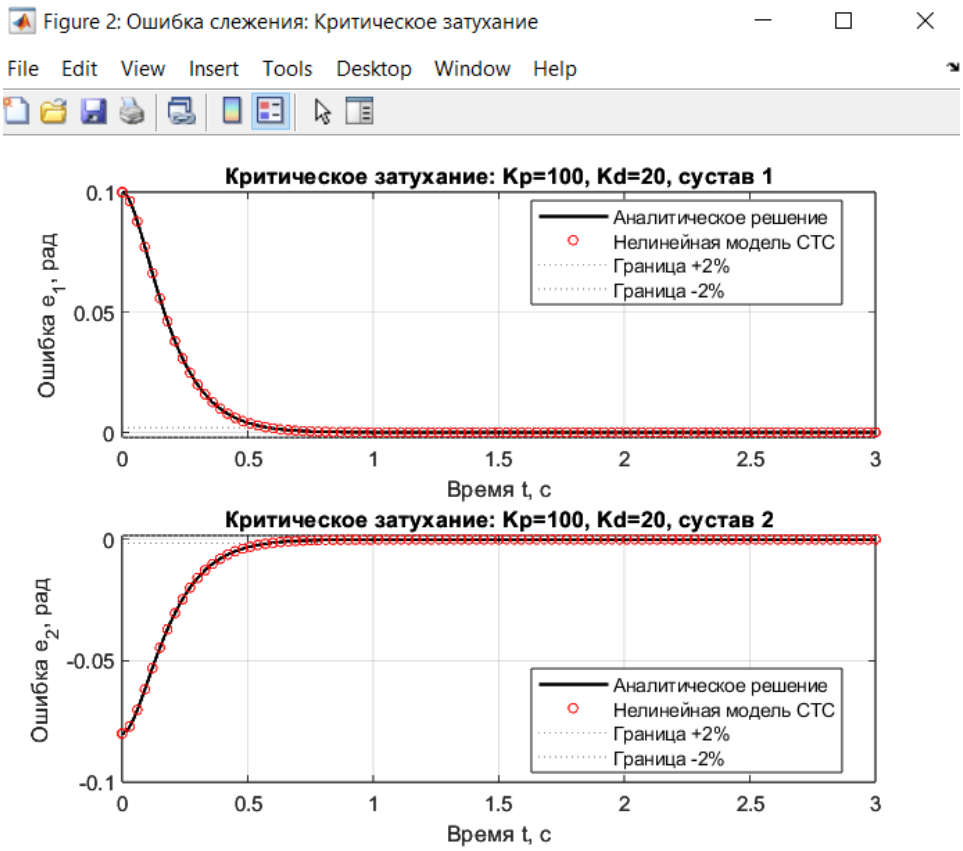


Рисунок 2.21 – Критическое затухание ошибки двух сочленений при $k_d = 20$ с$^{-1}$

При $k_d = 10$ с$^{-1}$ корни комплексно-сопряженные и равны $-5 \pm j8{,}6603$ с$^{-1}$ (рисунок 2.22). Огибающая ошибки убывает как $\exp(-5t)$, а частота колебаний равна $\sqrt{75} \approx 8{,}6603$ рад/с. Ошибка e_1 пересекает ноль, становится отрицательной и возвращается к нулю с затухающими колебаниями; ошибка e_2 меняет знак в противоположном направлении. По аналитическому решению первый противоположный экстремум наступает в момент $\pi/\sqrt{75} \approx 0{,}363$ с и составляет около $-0{,}0163$ рад для e_1 и $+0{,}0130$ рад для e_2. Время установления первого канала равно 0,808 с.

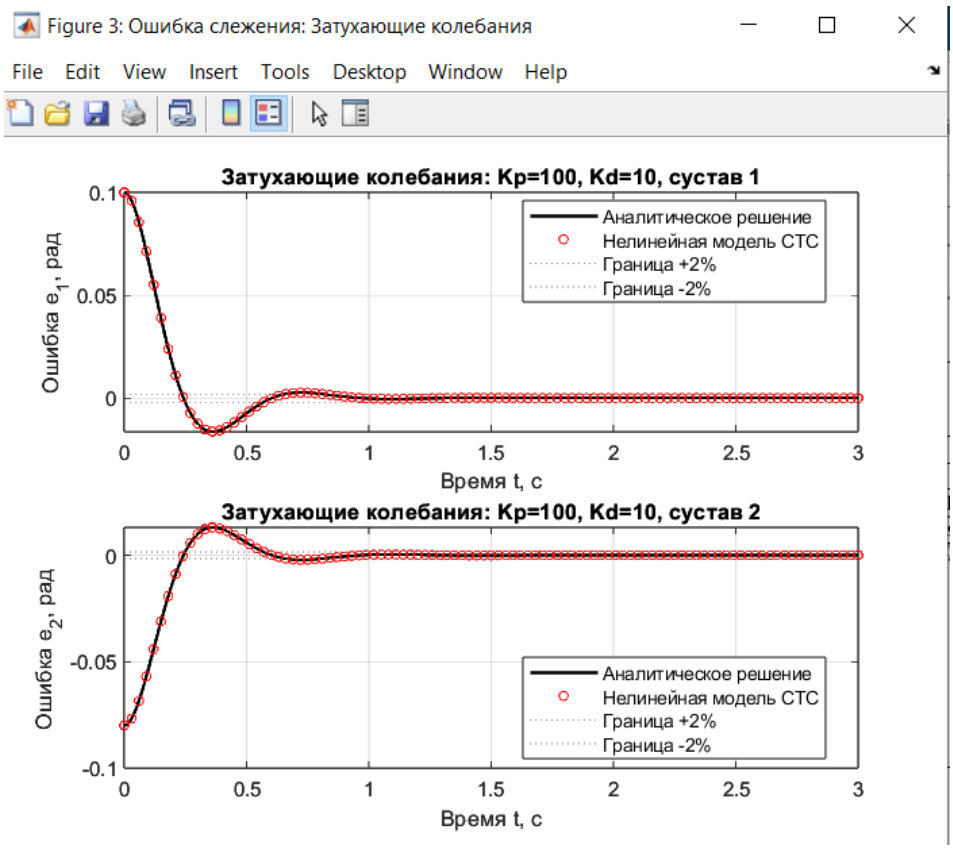


Рисунок 2.22 – Колебательное затухание ошибки двух сочленений при $k_d = 10$ с$^{-1}$

Во всех трех опытах маркеры нелинейной модели совпадают с аналитическими кривыми. Коэффициенты регулятора в обоих каналах одинаковы, а начальные производные ошибок равны нулю, поэтому аналитически $e_2(t) = -0{,}8\, e_1(t)$: ошибки каналов отличаются только масштабом и знаком, чем и объясняется противоположное направление кривых на верхних и нижних панелях.

На рисунках 2.23 и 2.24 приведены результаты прогонов с движущимся заданием. Каждый рисунок содержит четыре панели: слева — первый канал, справа — второй, сверху — координаты, снизу — ошибки. Черный пунктир на верхних панелях — заданная траектория q_d, синяя линия — фактическая траектория нелинейной модели. В момент $t = 0$ координаты равны $q_{d1} \approx 0{,}0596$ рад, $q_1 \approx 0{,}1596$ рад, $q_{d2} \approx -0{,}0779$ рад, $q_2 \approx -0{,}1579$ рад, т.е. начальные расстояния между траекториями составляют +0,10 и −0,08 рад и совпадают с начальными значениями ошибок на нижних панелях.

В апериодическом режиме (рисунок 2.23) расстояние между фактической и заданной траекториями сокращается постепенно, а ошибки затухают без колебаний и смены знака. После окончания переходного процесса координаты продолжают изменяться по синусоидальному заданию при малых ошибках.

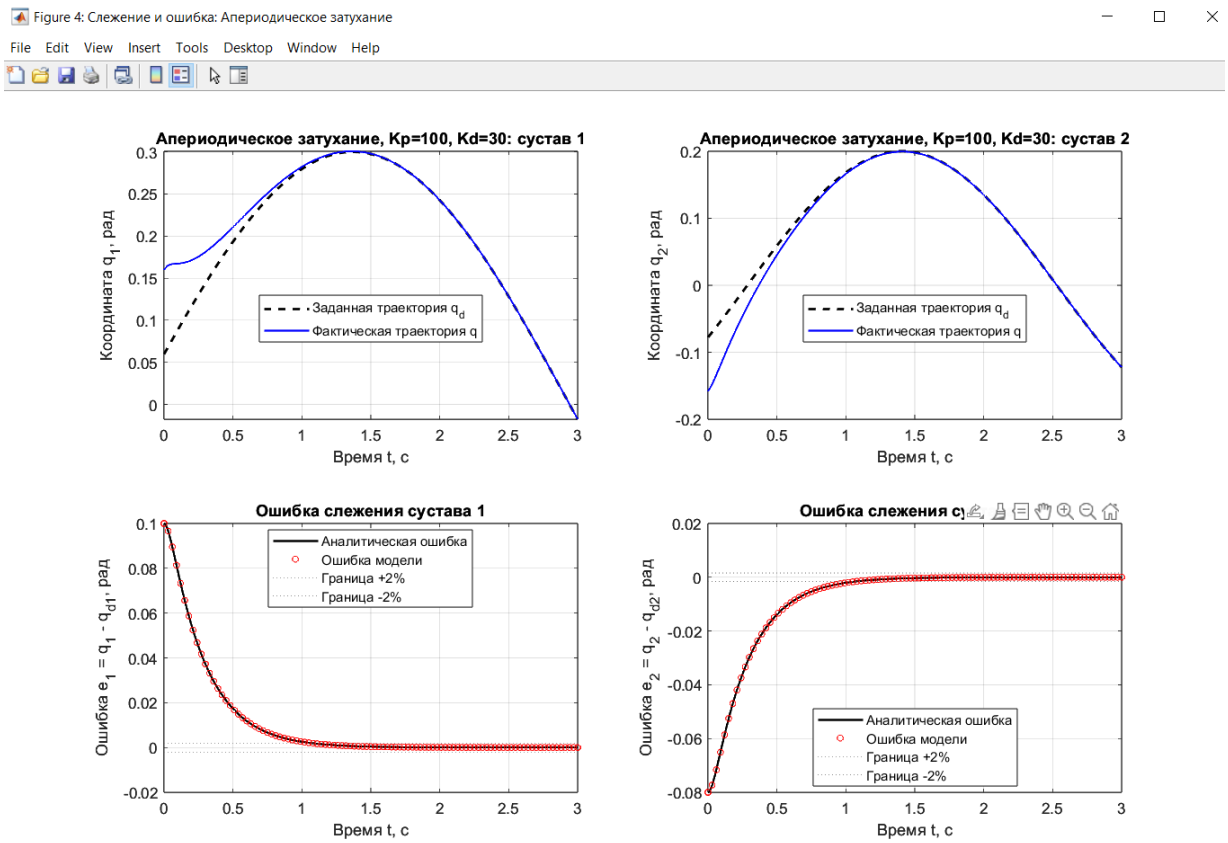


Рисунок 2.23 – Апериодический режим при движущемся задании, $k_d = 30$ с$^{-1}$

В критическом режиме (рисунок 2.24) траектории сближаются быстрее. На верхней левой панели фактическая координата первого сочленения в начале немного уменьшается, хотя задание возрастает. Колебательности это не означает: $q_1 = q_{d1} + e_1$, поэтому скорость $\dot{q}_1$ складывается из скорости задания и скорости затухания ошибки, а сама ошибка e_1 остается положительной и монотонно убывает.

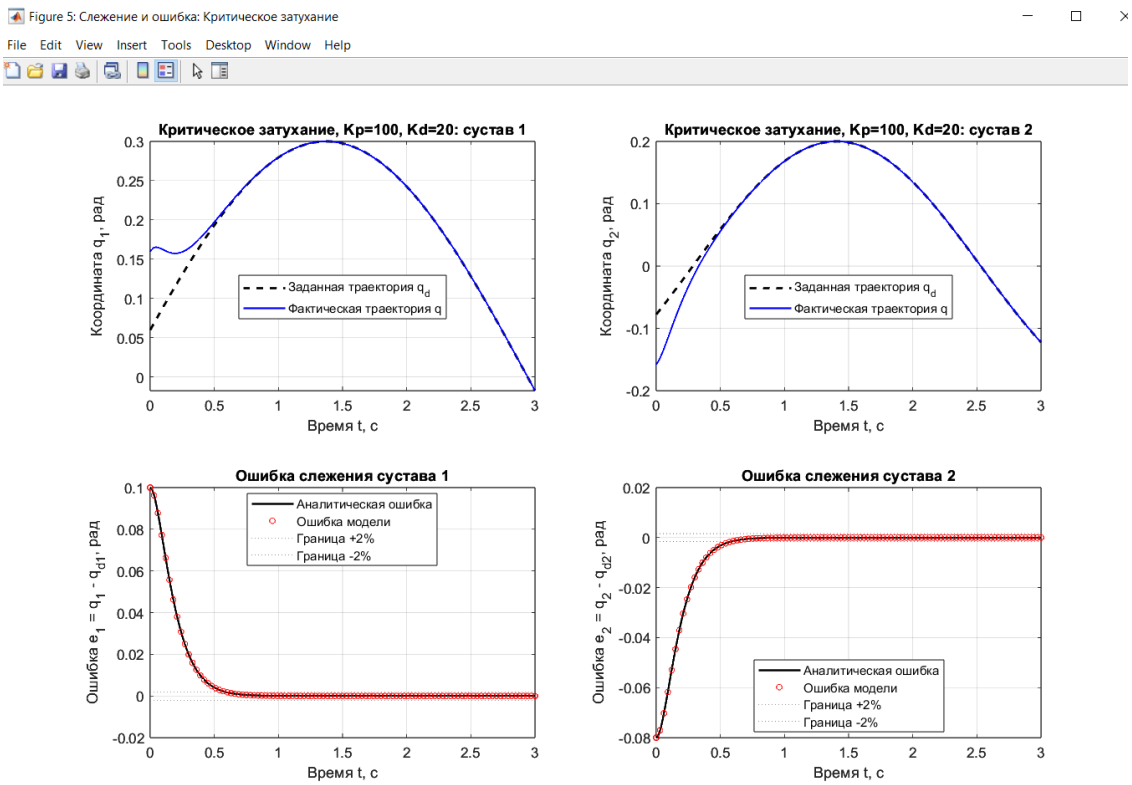


Рисунок 2.24 – Критический режим при движущемся задании, $k_d = 20$ с$^{-1}$

Совместное представление координат и ошибок показывает, что стремление ошибки к нулю означает сближение координат модели с текущим значением задания, т.е. обеспечивается слежение за движущейся траекторией, а не только выход в постоянное положение. На нижних панелях маркеры модели и в этом случае накладываются на аналитическую ошибку.

На рисунке 2.25 ошибки трех опытов сведены на общие оси: синяя кривая соответствует $k_d = 30$ с$^{-1}$, оранжевая — $k_d = 20$ с$^{-1}$, желтая — $k_d = 10$ с$^{-1}$. Начальные ошибки, задание и k_p одинаковы, поэтому различие переходных процессов обусловлено только коэффициентом k_d.

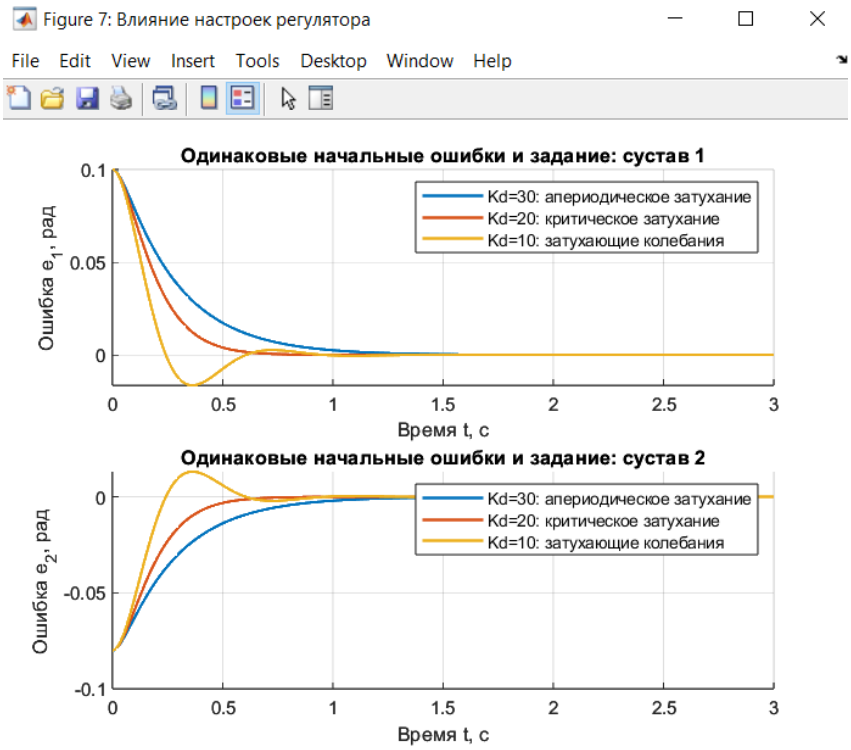


Рисунок 2.25 – Ошибки двух каналов при одинаковых начальных условиях и трех значениях k_d

При $k_d = 30$ с$^{-1}$ заключительный участок затухания самый медленный. При $k_d = 20$ с$^{-1}$ ошибка сходится без смены знака и быстрее всего входит в полосу ±2 %. При $k_d = 10$ с$^{-1}$ ошибка пересекает ноль раньше, но затем возникает противоположное отклонение, и время окончательного установления увеличивается по сравнению с критическим режимом. Времена установления первого канала приведены в таблице 2.1; при неподвижном и движущемся задании они одинаковы.

Таблица 2.1 — Время установления первого канала из отчета MATLAB

Режим	k_d, с$^{-1}$	Время, с
Апериодический	30	1,066
Критический	20	0,584
Колебательный	10	0,808

Таким образом, при $k_p = 100$ с$^{-2}$ из трех исследованных настроек наименьшее время установления по принятому критерию обеспечивает критическая настройка $k_d = 20$ с$^{-1}$. Время установления второго канала в отчете не выводится. Поскольку $e_2 = -0{,}8\,e_1$, нормированные ошибки каналов совпадают, и для второго канала ожидается то же время входа в собственную полосу ±2 %, т.е. ±0,0016 рад.

Рисунки 2.26–2.29 — снимки окон Scope из модели Simulink для критического режима с движущимся заданием ($k_p = 100$ с$^{-2}$, $k_d = 20$ с$^{-1}$); значения коэффициентов на самих снимках не подписаны. По горизонтали

отложено время от 0 до 3 с, по вертикали — угловая координата или ошибка в радианах. Совпадающие цветные линии могут скрывать одна другую, а отсутствие видимого зазора не означает точного равенства при конечном шаге интегрирования, поэтому визуальное сравнение дополняется численными показателями (пункт 2.5.4).

На рисунке 2.26 желтая линия — заданная координата q_{d1}, голубая — фактическая координата q_1. Начальная разность +0,10 рад после короткого переходного участка исчезает, и линии визуально накладываются. Около $t = 1{,}37$ с координаты достигают максимума, близкого к 0,30 рад, что соответствует заданию $q_{d1} = 0{,}30\sin(t + 0{,}20)$. К концу интервала координата становится слегка отрицательной вслед за заданием, а не вследствие потери устойчивости.

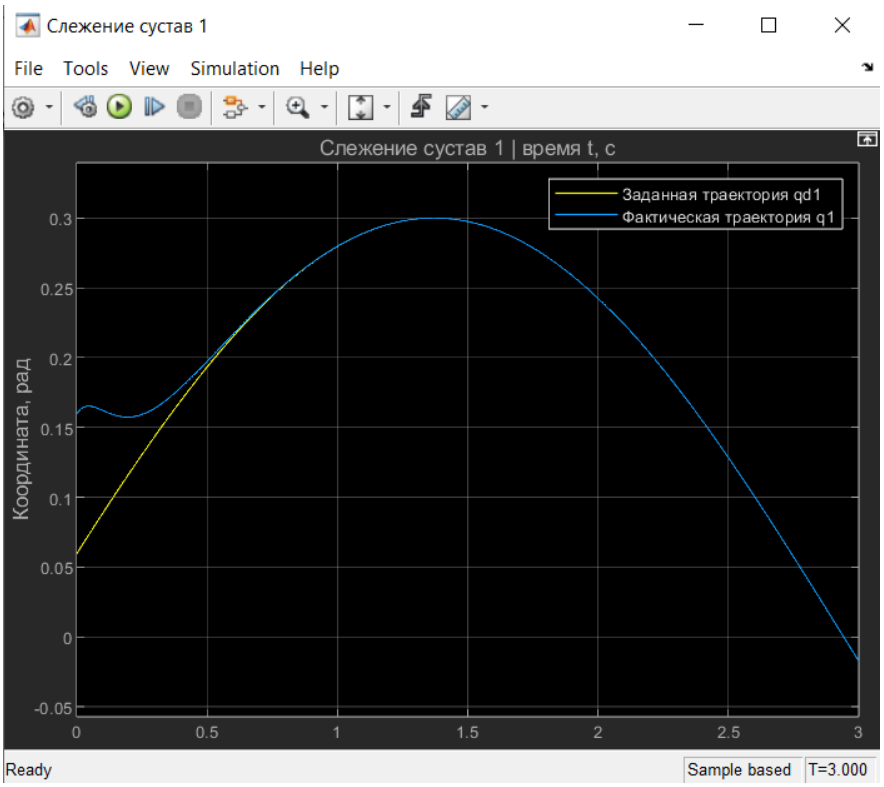


Рисунок 2.26 – Слежение первого сочленения в критическом режиме

На рисунке 2.27 желтая линия соответствует q_{d2}, голубая — q_2. В начале фактическая координата ниже заданной на 0,08 рад и по мере затухания ошибки подходит к ней снизу. Затем линии совпадают и проходят возрастающий и убывающий участки задания: максимум 0,20 рад расчетно достигается при $t \approx 1{,}41$ с, а на конечном участке обе координаты отрицательны, что согласуется с $q_{d2} = 0{,}20\sin(1{,}40t - 0{,}40)$.

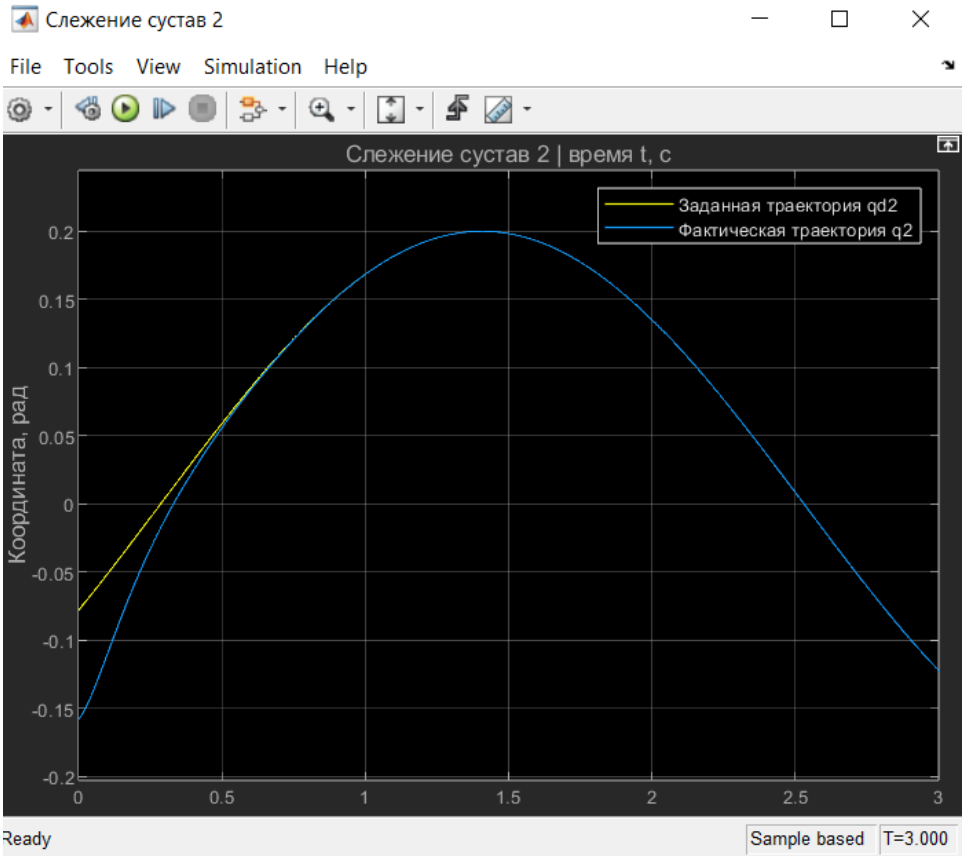


Рисунок 2.27 – Слежение второго сочленения в критическом режиме

На рисунках 2.28 и 2.29 желтая линия — ошибка нелинейной модели, голубая — расчетная ошибка вспомогательной ветви; из-за совпадения на большей части интервала видна одна линия. Ошибка e_1 убывает от 0,10 рад, ошибка e_2 возрастает от −0,08 рад, обе без смены знака, что соответствует критическому решению $e_i(t) = e_i(0)(1 + 10t)\exp(-10t)$. Границы полосы ±2 % на снимках не нанесены, поэтому время установления берется из численного отчета, а не оценивается визуально.

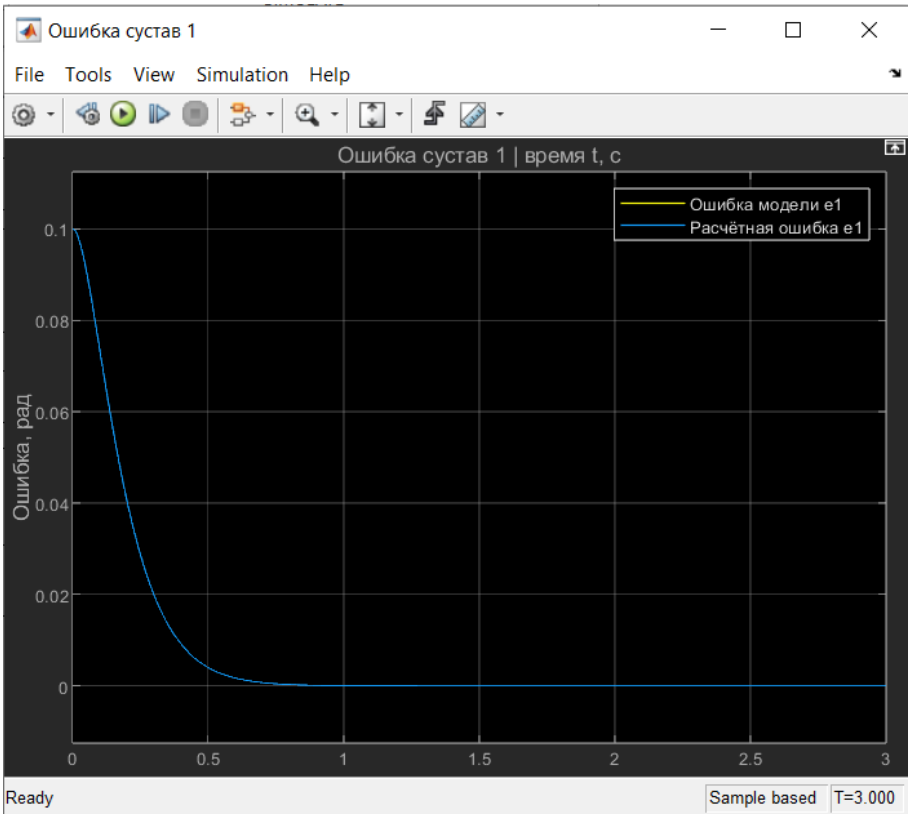


Рисунок 2.28 – Ошибка первого сочленения в критическом режиме

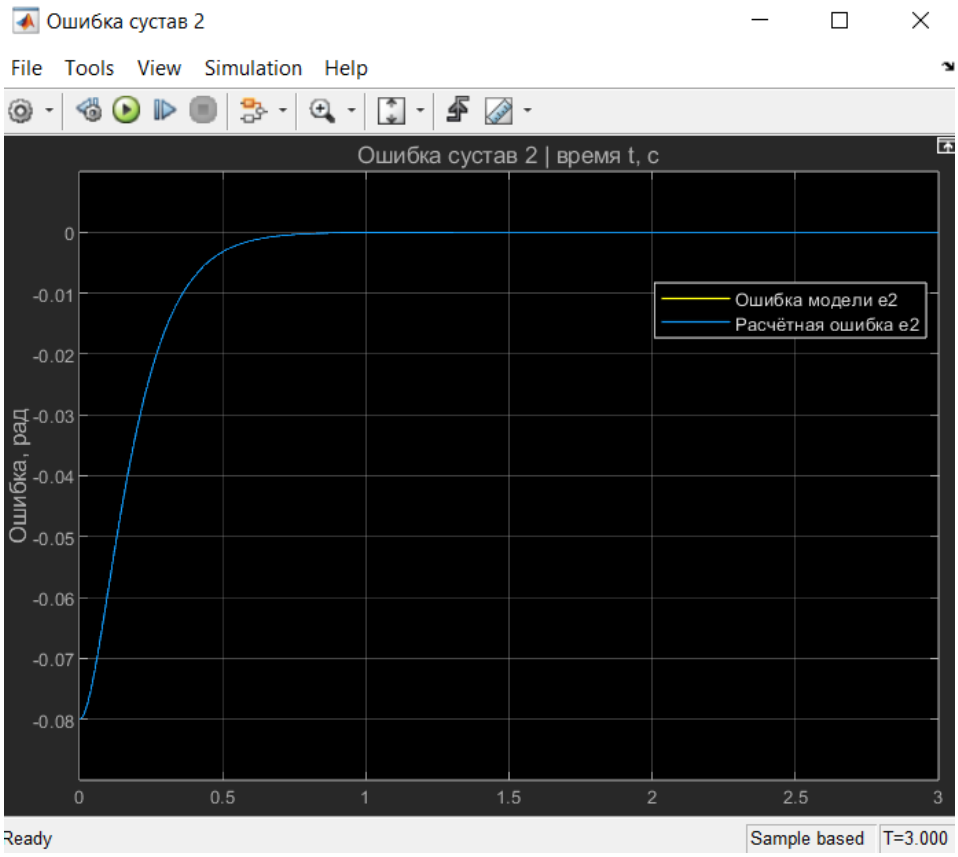


Рисунок 2.29 – Ошибка второго сочленения в критическом режиме

Сводный отчет MATLAB о шести основных опытах и дополнительных проверках приведен на рисунке 2.30.

```
Created and compiled connected model: Arai_CTC_error_20261011_214829_9eee
overdamped, moving reference=0: max |e-e_calc| = [2.51e-11 2.01e-11] rad
critical, moving reference=0: max |e-e_calc| = [9.7e-12 7.76e-12] rad
oscillatory, moving reference=0: max |e-e_calc| = [6.54e-12 5.23e-12] rad
overdamped, moving reference=1: max |e-e_calc| = [2.5e-11 2.01e-11] rad
critical, moving reference=1: max |e-e_calc| = [9.59e-12 7.72e-12] rad
oscillatory, moving reference=1: max |e-e_calc| = [6.35e-12 5.24e-12] rad
```

Case	ReferenceMoving	Kp	Kd	MaxAbsError_J1_rad	MaxAbsError_J2_rad	RMSE_J1_rad	RMSE_J2_rad	Settling_J1_s
{'overdamped' }	0	100	30	2.5118e-11	2.0094e-11	3.8466e-12	3.0772e-12	1.066
{'critical' }	0	100	20	9.7017e-12	7.7613e-12	2.0352e-12	1.6282e-12	0.584
{'oscillatory'}	0	100	10	6.5423e-12	5.2338e-12	1.7064e-12	1.3651e-12	0.808
{'overdamped' }	1	100	30	2.5007e-11	2.0096e-11	3.8233e-12	3.0967e-12	1.066
{'critical' }	1	100	20	9.5871e-12	7.725e-12	2.0123e-12	1.6479e-12	0.584
{'oscillatory'}	1	100	10	6.3504e-12	5.243e-12	1.691e-12	1.381e-12	0.808

Case	MaxDifference_J1_rad	MaxDifference_J2_rad
{'overdamped' }	3.3555e-13	4.5853e-13
{'critical' }	3.2628e-13	4.3907e-13
{'oscillatory'}	3.2042e-13	4.2658e-13

```
Step-halving check, critical case: [8.99e-12 7.24e-12] rad
```

Рисунок 2.30 – Отчет MATLAB о шести основных опытах и дополнительных проверках

В верхней таблице отчета столбец Case задает режим (overdamped, critical и oscillatory соответствуют апериодическому, критическому и колебательному режимам), столбец ReferenceMoving — тип задания (0 — неподвижное, 1 — движущееся), столбцы Kp и Kd — коэффициенты регулятора; суффиксы J1 и J2 обозначают сочленения. Столбцы MaxAbsError и RMSE содержат максимальное и среднеквадратическое расхождения между ошибкой нелинейной модели и аналитическим решением. Это показатели согласованности двух способов расчета, а не величина самой ошибки слежения, начальные значения которой равны 0,10 и −0,08 рад. Столбец Settling_J1_s содержит время последнего входа ошибки первого канала в полосу ±2 %. Нижняя таблица MaxDifference сравнивает ошибки при двух типах задания, а строка Step-halving check — критические прогоны с шагами 0,001 и 0,0005 с.

Обозначим через $\delta_i(t) = e_i^{\mathrm{sim}}(t) - e_i^{\mathrm{calc}}(t)$ расхождение между ошибкой нелинейной модели и аналитическим решением в i-м канале. По N отсчетам общей временной сетки вычисляются показатели

$$E_{\max,i} = \max_k |\delta_i(t_k)|, \qquad \mathrm{RMSE}_i = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_i^2\,(t_k)}. \tag{2.118}$$

Значения показателей, перенесенные из отчета на рисунке 2.30, приведены в таблице 2.2. Тип задания 0 соответствует $q_d \equiv 0$, тип 1 — движущемуся синусоидальному заданию; для всех строк $k_p = 100$ с$^{-2}$.

Таблица 2.2 – Расхождения между ошибкой нелинейной модели и аналитическим решением

k_d	Тип	$E_{\max,1}$, рад	$E_{\max,2}$, рад	RMSE_1, рад	RMSE_2, рад
30	0	$2{,}5118\cdot10^{-11}$	$2{,}0094\cdot10^{-11}$	$3{,}8466\cdot10^{-12}$	$3{,}0772\cdot10^{-12}$
20	0	$9{,}7017\cdot10^{-12}$	$7{,}7613\cdot10^{-12}$	$2{,}0352\cdot10^{-12}$	$1{,}6282\cdot10^{-12}$
10	0	$6{,}5423\cdot10^{-12}$	$5{,}2338\cdot10^{-12}$	$1{,}7064\cdot10^{-12}$	$1{,}3651\cdot10^{-12}$
30	1	$2{,}5007\cdot10^{-11}$	$2{,}0096\cdot10^{-11}$	$3{,}8233\cdot10^{-12}$	$3{,}0967\cdot10^{-12}$
20	1	$9{,}5871\cdot10^{-12}$	$7{,}7250\cdot10^{-12}$	$2{,}0123\cdot10^{-12}$	$1{,}6479\cdot10^{-12}$
10	1	$6{,}3504\cdot10^{-12}$	$5{,}2430\cdot10^{-12}$	$1{,}6910\cdot10^{-12}$	$1{,}3810\cdot10^{-12}$

Наибольшее максимальное расхождение составляет $2{,}5118\cdot10^{-11}$ рад, что более чем на четыре порядка меньше заранее принятого допуска 10^{-6} рад; среднеквадратические расхождения порядка 10^{-12} рад показывают близость кривых на всем интервале, а не только в отдельных точках. Такие значения ожидаемы: при точном совпадении параметров регулятора и объекта и отсутствии возмущений замкнутая система в точности описывается уравнением (2.114), и расхождение определяется только погрешностью численного интегрирования. Следовательно, результат подтверждает правильность программной реализации модели и закона управления, но не характеризует точность управления реальным манипулятором, для оценки которой необходимы учет неопределенностей и экспериментальная проверка. По той же причине малое расхождение не является критерием качества настройки: настройки сравниваются по переходным процессам и времени установления.

Уравнение (2.114) не содержит $q_d(t)$, поэтому при фиксированных коэффициентах и одинаковых начальных ошибках его решение не зависит от задания. Для проверки этого свойства сравнены ошибки (а не координаты) прогонов с неподвижным и движущимся заданием; результаты приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Максимальное различие ошибок при неподвижном и движущемся заданиях

Режим	Первый канал, рад	Второй канал, рад
Апериодический	$3{,}3555\cdot10^{-13}$	$4{,}5853\cdot10^{-13}$
Критический	$3{,}2628\cdot10^{-13}$	$4{,}3907\cdot10^{-13}$
Колебательный	$3{,}2042\cdot10^{-13}$	$4{,}2658\cdot10^{-13}$

Наибольшее различие составляет $4{,}5853\cdot10^{-13}$ рад, что подтверждает независимость свободного движения ошибки от задания в номинальном случае. Равенство начальных ошибок здесь принципиально: если при смене задания сохранить прежние $q(0)$ и $\dot{q}(0)$, начальное рассогласование изменится, и различие кривых будет обусловлено начальными условиями, а не регулятором.

Для оценки влияния шага интегрирования критический прогон с движущимся заданием повторен с шагом 0,0005 с; его результат приведен к основной временной сетке и сравнен с прогоном при шаге 0,001 с (таблица 2.4).

Таблица 2.4 – Максимальное изменение результата при уменьшении шага интегрирования вдвое

Первый канал, рад	Второй канал, рад
$8{,}99\cdot10^{-12}$	$7{,}24\cdot10^{-12}$

Изменение результата не превышает $8{,}99\cdot10^{-12}$ рад, т.е. мало по сравнению с начальными ошибками и допуском сравнения. Проверка показывает слабую чувствительность решения к шагу интегрирования в данном опыте, но не заменяет исследования сходимости для всех настроек.

Таким образом, компьютерное исследование подтвердило корректность реализации модели манипулятора и закона управления (2.112), (2.113): при точной компенсации нелинейной динамики ошибка нелинейной модели совпадает с решением линейного уравнения (2.114) с точностью численного интегрирования, не зависит от задания и слабо чувствительна к шагу интегрирования. Характер переходного процесса определяется коэффициентом k_d: при $k_p = 100$ с$^{-2}$ наименьшее время установления по критерию ±2 % (0,584 с) из трех исследованных настроек обеспечивает критическая настройка $k_d = 20$ с$^{-1}$.

Выводы по разделу 2

В разделе 2 исследованы математические и структурные свойства последовательного робота-манипулятора с силовым управлением, рассмотрены условия его дифференциальной плоскостности и траекторной эквивалентности линейной системе управления, а также обоснована возможность применения обобщенного метода вычисляемых моментов для синтеза системы траекторного управления.

Разработана математическая модель динамики двухзвенного робота-манипулятора, учитывающая инерционные, кориолисовы, центробежные и гравитационные составляющие. Установлены условия преобразования нелинейной динамики манипулятора к эквивалентной линейной системе управления.

Показано, что полностью приводной последовательный робот-манипулятор обладает свойством дифференциальной плоскостности. В качестве плоского выхода могут быть выбраны обобщенные координаты сочленений, через которые и их производные выражаются переменные состояния и управляющие моменты. При невырожденности матрицы инерции система допускает линеаризацию статической обратной связью и преобразование к независимым двойным интеграторам.

Обоснована связь классического метода вычисляемых моментов с обобщенным методом траекторного управления дифференциально плоскими системами типа А. Показано, что компенсация нелинейной динамики позволяет свести задачу траекторного управления манипулятором к синтезу линейного регулятора.

Проведено компьютерное исследование системы управления в MATLAB/Simulink. Исследованы различные режимы затухания ошибки слежения и подтверждена согласованность аналитических и численных результатов. Максимальное расхождение между решениями не превышает $2{,}5118 \cdot 10^{-11}$ рад, что подтверждает корректность реализации эквивалентной линейной модели в исследованных условиях.

Таким образом, полученные результаты обосновывают первое научное положение, выносимое на защиту, согласно которому последовательный робот-манипулятор с силовым управлением рассматривается как дифференциально плоская система особого типа, а классический метод вычисляемых моментов является частным случаем обобщенного метода траекторного управления такими системами. Теоретическое обоснование основано на установлении свойств дифференциальной плоскостности, траекторной эквивалентности и линеаризации обратной связью, а результаты компьютерного моделирования подтверждают справедливость полученных соотношений для исследованной модели. Отдельные вопросы разработки алгоритмов управления роботами-манипуляторами и синтеза нелинейного контроллера рассмотрены в публикации автора [69].

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

3.1 Динамика двухзвенного планарного манипулятора в терминах дифференциальной геометрии двумерных поверхностей в трёхмерном пространстве

Воспользуемся простейшей моделью планарного двухзвенного манипулятора, схематически изображённой на рисунке 3.1. Звенья манипулятора представляют собой невесомые жёсткие стержни длиной l_1 и l_2, на концах которых закреплены точечные массы (шарики) одинаковой массы m: первая масса находится в шарнире, соединяющем звенья («локте»), вторая — на конце второго звена. Манипулятор движется в горизонтальной плоскости, поэтому сила тяжести работы не совершает. Конфигурация манипулятора определяется углом θ_1 поворота первого звена относительно оси x и углом θ_2 поворота второго звена относительно первого.

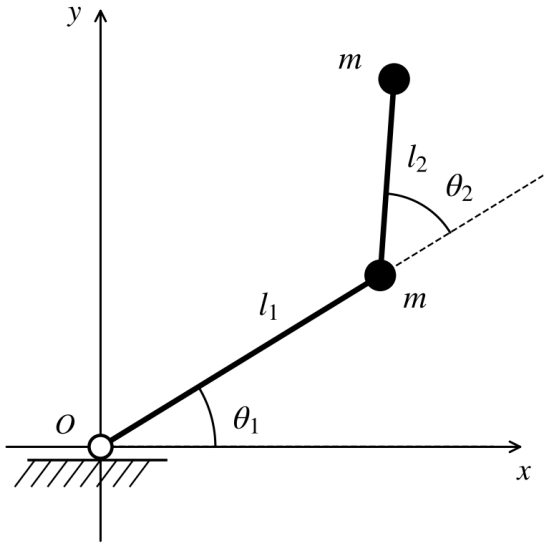


Рисунок 3.1 – Схема планарного двухзвенного манипулятора с точечными массами на концах звеньев

Будем полагать, что во время движения манипулятора углы θ_1 и θ_2 ограничены неравенствами (3.1):

$$\begin{aligned} \theta^1_{\min} \le \theta_1 \le \theta^1_{\max}, \\ \theta^2_{\min} \le \theta_2 \le \theta^2_{\max}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти неравенства определяют прямоугольную область D конфигурационного пространства манипулятора, на котором введена декартова система координат (θ_1, θ_2). Область D мы будем называть *рабочим пространством* двухзвенного манипулятора и по умолчанию предполагать, что любая рассматриваемая траектория манипулятора в конфигурационном пространстве целиком лежит в D.

Траекторией манипулятора в рабочем пространстве D, заданной на временном интервале $[t_0, t_1]$, будем называть гладкое отображение $\gamma\colon [t_0, t_1] \to D$, геометрически представляющее собой плоскую кривую с двумя концами, параметрически заданную двумя гладкими функциями $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Угловые скорости вращения валов приводов $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$ и $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$ будем рассматривать как компоненты вектора *обобщённой скорости* манипулятора

$$\mathbf{\Omega}(t) = [\omega_1(t),\ \omega_2(t)]^T, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.2}$$

Если в момент времени $t_p \in [t_0, t_1]$ траектория проходит через точку p с координатами $\left(\theta_1(t_p), \theta_2(t_p)\right)$, то вектор $\mathbf{\Omega}_p = \mathbf{\Omega}(t_p)$ является касательным вектором к плоской кривой, описывающей траекторию манипулятора в рабочем пространстве (рисунок 3.2). Вопросы геометрического описания и идентификации плоских кривых ранее рассматривались в работе [70]. Полученные результаты относятся к методам геометрического анализа кривых.

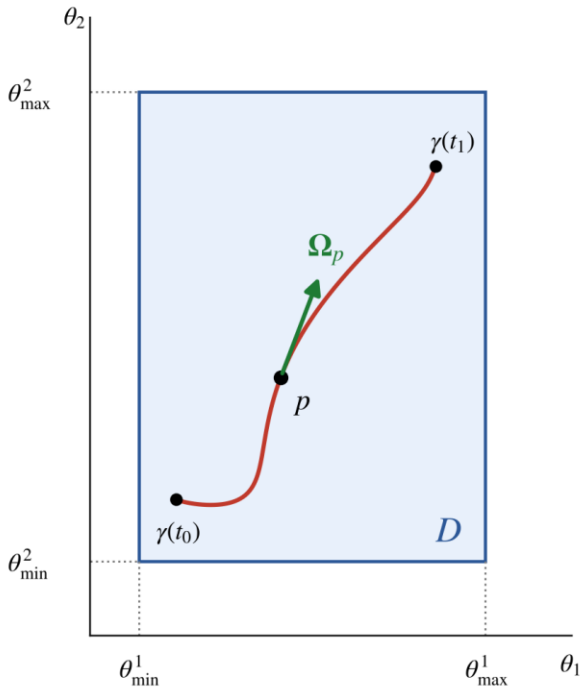


Рисунок 3.2 – Траектория γ в рабочем пространстве манипулятора D и вектор обобщённой скорости $\mathbf{\Omega}_p$ в точке p

Применение методов дифференциальной геометрии к задачам планирования траекторий манипуляторов исследовано в работе [71], где использовано дискретное внешнее исчисление для планирования движения при термическом плазменном напылении покрытий. Вопросы применения матричных преобразований и методов линейной алгебры к задачам математического моделирования рассматривались также в работе с участием автора диссертационного исследования [72], посвящённой исследованию управляющей матрицы сингулярного разложения преобразования Радона. В

настоящем исследовании геометрический подход развивается в направлении описания динамики манипулятора на основе метрики кинетической энергии. Обозначим радиус-векторы масс в плоскости движения через $\mathbf{p}_1$ (масса в локте) и $\mathbf{p}_2$ (масса на конце второго звена).

$$\mathbf{p}_1 = l_1 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + l_2 \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Первая масса движется по окружности радиуса l_1 с линейной скоростью $l_1\omega_1$. Скорость второй массы складывается из скорости локтя и скорости её вращения вокруг локтя с абсолютной угловой скоростью второго звена $\omega_1 + \omega_2$; угол между этими двумя составляющими равен θ_2. По теореме косинусов (3.4):

$$\begin{gathered} \|\dot{\mathbf{p}}_1\|^2 = l_1^2\omega_1^2, \qquad \|\dot{\mathbf{p}}_2\|^2 \\ = l_1^2\omega_1^2 + l_2^2(\omega_1 + \omega_2)^2 + 2l_1l_2\cos\theta_2\,\omega_1(\omega_1 + \omega_2). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Складывая кинетические энергии масс и группируя слагаемые при ω_1^2, $\omega_1\omega_2$ и ω_2^2, получаем выражение кинетической энергии манипулятора в конфигурации $p = (\theta_1, \theta_2)$ в виде квадратичной формы от компонент вектора обобщённой скорости (3.5):

$$\begin{gathered} E_p^{\text{к}}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}[\omega_1,\ \omega_2] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij}\,(\theta_1, \theta_2)\,\omega_i\omega_j, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где коэффициенты m_{ij} матрицы инерции $M(p)$ зависят только от конфигурации манипулятора:

$$\begin{gathered} m_{11} = m(2l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos\theta_2), \quad m_{12} = m_{21} \\ = m(l_2^2 + l_1l_2\cos\theta_2), \quad m_{22} = ml_2^2. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Как будет показано ниже, функции $m_{ij}(\theta_1, \theta_2)$ можно геометрически интерпретировать как коэффициенты первой квадратичной формы некоторой двумерной поверхности в трёхмерном пространстве; там же из геометрических соображений будут установлены основные свойства матрицы $M(p)$.

Пусть в трёхмерном пространстве задана декартова система координат XYZ и зависимость радиус-вектора $\mathbf{r}$ от точки $p = (\theta_1, \theta_2)$ рабочего пространства D задана формулой

$$\begin{gathered} \forall(\theta_1, \theta_2) \in D \quad \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) \\ = r_x(\theta_1, \theta_2)\,\mathbf{i} + r_y(\theta_1, \theta_2)\,\mathbf{j} + r_z(\theta_1, \theta_2)\,\mathbf{k}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — координатные орты системы XYZ, образующие ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, а $r_x, r_y, r_z : D \to \mathbb{R}$ — заданные гладкие функции двух вещественных аргументов. Образ области D при отображении (3.7) есть двумерная поверхность $\sigma \subset \mathbb{R}^3$, параметризованная переменными θ_1, θ_2. При этом любая траектория манипулятора в рабочем пространстве отображается в кривую на поверхности σ, заданную параметрически (3.8):

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\big(\theta_1(t), \theta_2(t)\big). \tag{3.8}$$

Параметр t здесь интерпретируется как момент времени из интервала, на котором задана траектория манипулятора. Обозначим как $\mathbf{r}_{\theta_1}$ и $\mathbf{r}_{\theta_2}$ частные производные вектор-функции $\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ (3.9):

$$\mathbf{r}_{\theta_1} = \frac{\partial r_x}{\partial \theta_1}\mathbf{i} + \frac{\partial r_y}{\partial \theta_1}\mathbf{j} + \frac{\partial r_z}{\partial \theta_1}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_{\theta_2} = \frac{\partial r_x}{\partial \theta_2}\mathbf{i} + \frac{\partial r_y}{\partial \theta_2}\mathbf{j} + \frac{\partial r_z}{\partial \theta_2}\mathbf{k}. \tag{3.9}$$

По правилу дифференцирования сложной функции касательный вектор к кривой (3.8) в точке $q = \mathbf{r}(p)$ имеет вид (3.10):

$$\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{r}}\big(t_p\big) = \omega_1\, \mathbf{r}_{\theta_1}(p) + \omega_2\, \mathbf{r}_{\theta_2}(p), \tag{3.10}$$

где $\omega_i = \dot{\theta}_i\big(t_p\big)$, а t_p — момент прохождения точки p. Ситуация наглядно представлена на рисунке 3.3: траектория в двумерной области D переходит в пространственную кривую на поверхности σ, а вектор обобщённой скорости $\mathbf{\Omega}_p$ — в касательный к этой кривой вектор $\mathbf{v}_q$.

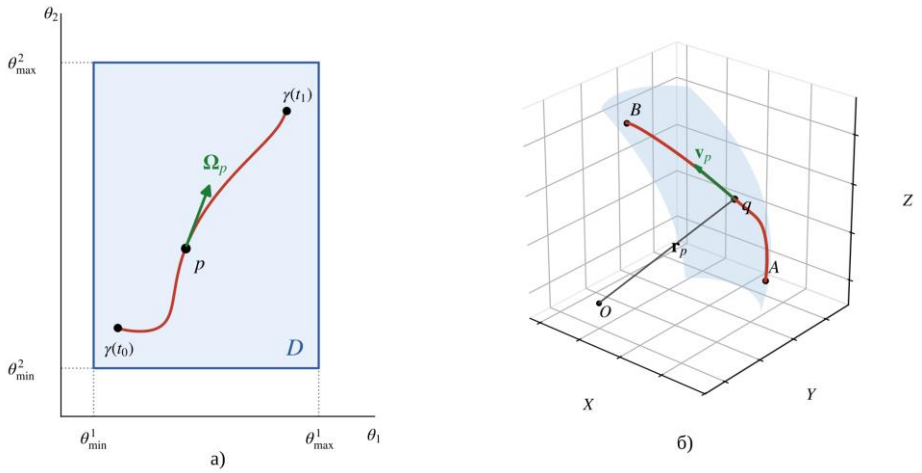


Рисунок 3.3 – Отображение траектории в рабочем пространстве двухзвенного манипулятора (а) в параметрически заданную кривую на поверхности σ в трёхмерном пространстве (б), определённое вектор-функцией $\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$

В любой точке q поверхности σ векторы $\mathbf{r}_{\theta_1}(p)$ и $\mathbf{r}_{\theta_2}(p)$ касаются поверхности: прямые, проходящие через q с этими направляющими векторами,

касаются σ в точке q. Будем предполагать, что эти векторы неколлинеарны (параметризация регулярна). Тогда единичный вектор нормали к поверхности в точке q вычисляется по формуле (3.11):

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{r}_{\theta_1}(p) \times \mathbf{r}_{\theta_2}(p)}{\left\|\mathbf{r}_{\theta_1}(p) \times \mathbf{r}_{\theta_2}(p)\right\|}, \tag{3.11}$$

где «×» обозначает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Обозначим как α_q плоскость, касающуюся поверхности σ в точке q (рисунок 3.4). Вектор $\mathbf{n}_q = \left[n_x, n_y, n_z\right]^T$ является нормалью к α_q, поэтому для любой точки $m' \in \alpha_q$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_{m'}$ вектор $\mathbf{r}_{m'} - \mathbf{r}(p)$ ортогонален $\mathbf{n}_q$, и уравнение касательной плоскости имеет вид (3.12):

$$n_x x + n_y y + n_z z = \mathbf{n}_q \cdot \mathbf{r}(p). \tag{3.12}$$

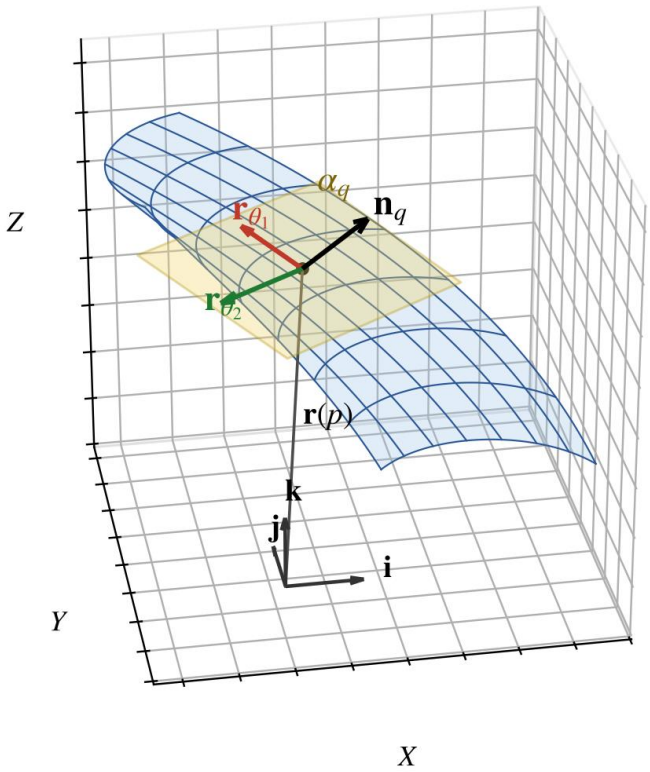


Рисунок 3.4 – Касательные векторы $\mathbf{r}_{\theta_1}$, $\mathbf{r}_{\theta_2}$, единичная нормаль $\mathbf{n}_q$ и касательная плоскость α_q в точке q поверхности σ

Для нас важнее другое следствие: множество векторов $M_q = \{\mathbf{r}_{m'} - \mathbf{r}(p) \mid m' \in \alpha_q\}$ есть двумерное линейное подпространство $\mathbb{R}^3$, состоящее в точности из линейных комбинаций $\lambda_1 \mathbf{r}_{\theta_1}(p) + \lambda_2 \mathbf{r}_{\theta_2}(p)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Это подпространство называется *касательным пространством* поверхности σ в точке q и обозначается $T_q\sigma$. Обозначим как $L_p \cong \mathbb{R}^2$ линейное пространство всех возможных векторов обобщённой скорости в точке p (каждый вектор $\mathbf{\Omega} \in L_p$

реализуется бесконечным множеством траекторий, проходящих через p). Формула (3.10) задаёт линейное отображение (3.13):

$$d\mathbf{r}_p : L_p \to T_q\sigma, \qquad d\mathbf{r}_p(\boldsymbol{\Omega}) = \omega_1\,\mathbf{r}_{\theta_1}(p) + \omega_2\,\mathbf{r}_{\theta_2}(p), \tag{3.13}$$

которое при регулярной параметризации является изоморфизмом: векторы $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_{\theta_1}(p)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_{\theta_2}(p)$ образуют базис $T_q\sigma$, а компоненты ω_1, ω_2 вектора обобщённой скорости суть координаты касательного вектора $\mathbf{v}_q$ в этом базисе. Поскольку в каждой точке поверхности определены два касательных вектора, можно говорить о касательных векторных полях $\mathbf{r}_{\theta_1}$ и $\mathbf{r}_{\theta_2}$ на σ. Координатные линии $\theta_2 = \text{const}$ и $\theta_1 = \text{const}$, образующие в D прямоугольную сетку, отображаются в интегральные линии полей $\mathbf{r}_{\theta_1}$ и $\mathbf{r}_{\theta_2}$ соответственно (рисунок 3.5).

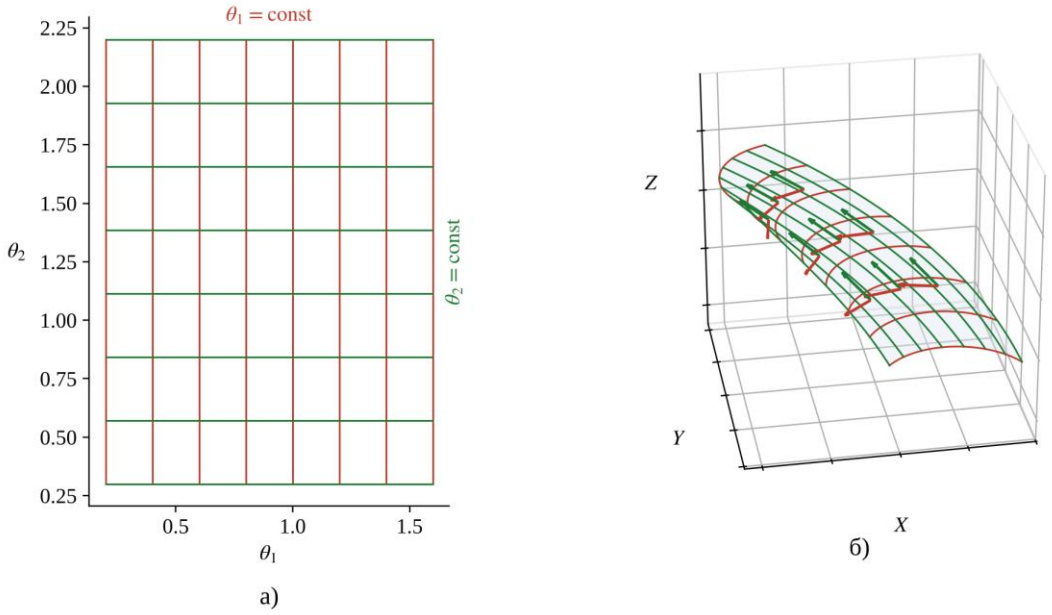


Рисунок 3.5 – Прямоугольная координатная сетка в области D (а) и её образ на поверхности σ — интегральные линии касательных векторных полей $\mathbf{r}_{\theta_1}$ (зелёные стрелки) и $\mathbf{r}_{\theta_2}$ (красные стрелки) (б)

Заметим, что конфигурационное пространство двухзвенного манипулятора без ограничений на углы есть тор $C = S^1 \times S^1$, а рабочее пространство D — область одной из его карт; пространство L_p — это касательное пространство T_pC, а отображение (3.13) — дифференциал отображения $\mathbf{r}$ в точке p.

Вычислим скалярное произведение двух касательных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\sigma$, заданных своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (3.14):

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2. \tag{3.14}$$

Будем обозначать скалярное произведение касательных векторов символом $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. В силу линейности скалярного произведения по первому аргументу (3.15):

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle + u_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle, \tag{3.15}$$

а в силу линейности по второму аргументу:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = {} & u_1 v_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + u_1 v_2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + u_2 v_1 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \\ & + u_2 v_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Попарные скалярные произведения векторов базиса образуют *матрицу Грама* G_p этого базиса (3.17):

$$G_p = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \end{bmatrix}, \qquad g_{ij} = \mathbf{r}_{\theta_i} \cdot \mathbf{r}_{\theta_j}. \tag{3.17}$$

Поскольку скалярное произведение симметрично, $g_{12} = g_{21}$, т. е. матрица G_p симметрична в каждой точке поверхности. В классической дифференциальной геометрии коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} принято обозначать E, F, G соответственно. С учётом (3.17) равенство (3.16) записывается в эквивалентных формах (3.18):

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij} u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

В частности, квадрат модуля касательного вектора $\mathbf{v}_q$ (3.10) равен (3.19):

$$\|\mathbf{v}_q\|^2 = g_{11}\omega_1^2 + 2g_{12}\omega_1\omega_2 + g_{22}\omega_2^2 = \boldsymbol{\Omega}^T G_p \boldsymbol{\Omega}. \tag{3.19}$$

Квадратичная форма (3.19) называется *первой квадратичной формой* поверхности. Её сравнение с выражением кинетической энергии (3.5) приводит к ключевому наблюдению: если удастся подобрать параметризацию $\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ так, что в каждой точке $G_p = M(p)$, то при любом движении манипулятора будет выполняться равенство (3.20):

$$E^{\text{к}} = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2, \tag{3.20}$$

т. е. кинетическая энергия манипулятора совпадёт с кинетической энергией материальной точки единичной массы, движущейся по поверхности σ вдоль кривой (3.8). Эту точку будем называть *изображающей точкой* манипулятора.

Подчеркнём, что с алгебраической точки зрения скалярное произведение на линейном пространстве V — это отображение $g: V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям билинейности, симметричности и положительной определённости (3.21):

$$\begin{aligned} &g(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \lambda_1 g(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \lambda_2 g(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}), \\ &g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ &g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ при } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Любая симметричная положительно определённая матрица, в частности матрица инерции $M(p)$, задаёт по формуле (3.18) скалярное произведение на L_p — независимо от того, существует ли поверхность, для которой она является матрицей Грама. Гладкое поле таких скалярных произведений и есть *риманова метрика*; в этом смысле матрица инерции задаёт на рабочем пространстве метрику кинетической энергии. Возникает вопрос: можно ли для заданной на D метрики построить параметризацию $\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ поверхности в $\mathbb{R}^3$, матрица Грама которой совпадает с заданной? На языке римановой геометрии это вопрос об изометрическом вложении двумерного риманова многообразия в $\mathbb{R}^3$. Для двухзвенного манипулятора ответ положителен, и соответствующая поверхность будет построена в явном виде в следующем пункте; в подразделе 3.2 будет показано, что аналогичная реализация метрики существует (в евклидовом пространстве большей размерности) и для любого последовательного манипулятора.

Будем искать радиус-вектор поверхности в виде суммы двух вектор-функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. Такие поверхности называются *поверхностями переноса*: они образуются параллельным переносом одной кривой вдоль другой. Для поверхности переноса $\mathbf{r} = \mathbf{A}(u) + \mathbf{B}(w)$ производная $\mathbf{r}_u = \mathbf{A}'(u)$ зависит только от u, производная $\mathbf{r}_w = \mathbf{B}'(w)$ — только от w, и коэффициенты первой квадратичной формы вычисляются особенно просто.

Удобно перейти от относительных углов θ_1, θ_2 к *абсолютным* углам поворота звеньев относительно оси x (3.22):

$$\varphi_1 = \theta_1, \qquad \varphi_2 = \theta_1 + \theta_2. \tag{3.22}$$

В абсолютных углах скорость второй массы складывается из скорости локтя, по модулю равной $l_1\dot{\varphi}_1$, и скорости её вращения вокруг локтя, по модулю равной $l_2\dot{\varphi}_2$, причём угол между этими векторами равен $\varphi_2 - \varphi_1$. Поэтому кинетическая энергия принимает вид (3.23):

$$E^{\text{к}} = \frac{1}{2}\left[2ml_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2ml_1l_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + ml_2^2\dot{\varphi}_2^2\right], \tag{3.23}$$

т. е. матрица метрики в координатах (φ_1, φ_2) равна (3.24):

$$\widetilde{M} = m\begin{bmatrix} 2l_1^2 & l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & l_2^2 \end{bmatrix}. \qquad (3.24)$$

Будем искать поверхность в виде $\mathbf{r} = \mathbf{A}(\varphi_1) + \mathbf{B}(\varphi_2)$. Согласно (3.17) и (3.24) вектор-функции $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должны удовлетворять трём условиям (3.25):

$$\|\mathbf{A}'(\varphi_1)\|^2 = 2ml_1^2, \qquad \|\mathbf{B}'(\varphi_2)\|^2 = ml_2^2, \qquad \mathbf{A}'(\varphi_1) \cdot \mathbf{B}'(\varphi_2) = ml_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (3.25)$$

Третье условие подсказывает выбрать в качестве первых двух компонент векторов $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$ векторы вида $[-\sin\varphi, \cos\varphi]$, скалярное произведение которых равно косинусу разности углов. Тогда для выполнения второго условия третью компоненту вектора $\mathbf{B}'$ следует положить равной нулю, а для выполнения первого — добавить к вектору $\mathbf{A}'$ третью компоненту, равную $\sqrt{m}\, l_1$, которая восполняет недостающее слагаемое ml_1^2 и не влияет на скалярное произведение:

$$\mathbf{A}'(\varphi_1) = \sqrt{m}\, l_1 \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}'(\varphi_2) = \sqrt{m}\, l_2 \begin{bmatrix} -\sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.26)$$

Непосредственная проверка показывает, что все три условия (3.25) выполнены. Интегрируя (3.26) (постоянные интегрирования, соответствующие параллельному переносу поверхности, положим равными нулю), получаем (3.27):

$$\mathbf{A}(\varphi_1) = \sqrt{m}\, l_1 \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}(\varphi_2) = \sqrt{m}\, l_2 \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.27)$$

Кривая $\mathbf{A}(\varphi_1)$ — винтовая линия радиуса $\sqrt{m}\, l_1$ с шагом $2\pi\sqrt{m}\, l_1$, кривая $\mathbf{B}(\varphi_2)$ — окружность радиуса $\sqrt{m}\, l_2$ в горизонтальной плоскости. Возвращаясь с помощью (3.22) к относительным углам, получаем окончательное уравнение искомой поверхности σ:

$$\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{m}\begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \theta_1 \end{bmatrix}. \qquad (3.28)$$

Проверим результат непосредственно в относительных углах. Частные производные (3.28) равны:

$$\mathbf{r}_{\theta_1} = \sqrt{m}\begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{\theta_2} = \sqrt{m}\begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.29)$$

откуда

$$g_{11} = \mathbf{r}_{\theta_1} \cdot \mathbf{r}_{\theta_1} = m(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos\theta_2 + l_1^2) = m_{11},$$
$$g_{12} = \mathbf{r}_{\theta_1} \cdot \mathbf{r}_{\theta_2} = m(l_2^2 + l_1 l_2 \cos\theta_2) = m_{12}, \qquad (3.30)$$
$$g_{22} = \mathbf{r}_{\theta_2} \cdot \mathbf{r}_{\theta_2} = m l_2^2 = m_{22}.$$

Таким образом, первая квадратичная форма поверхности (3.28) тождественно совпадает с метрикой кинетической энергии (3.6), и для любого движения манипулятора выполняется равенство (3.20).

Построенная поверхность имеет прозрачный механический смысл. Первые две координаты точки $\mathbf{r}$ — это умноженные на $\sqrt{m}$ координаты второй массы, поэтому её вклад в кинетическую энергию равен $1/2\left(\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2\right)$. Первая масса движется по окружности радиуса l_1 со скоростью $l_1\dot{\theta}_1$; её вклад $1/2\, m l_1^2 \dot{\theta}_1^2$ учитывается третьей координатой $r_z = \sqrt{m}\, l_1 \theta_1$ — окружность, по которой движется локоть, как бы «развёрнута» вдоль оси Z. Геометрически поверхность σ получается переносом горизонтальной окружности радиуса $\sqrt{m}\, l_2$ вдоль винтовой линии и имеет вид изогнутой трубки (рисунок 3.6). Поскольку окружности, отвечающие различным значениям θ_1, лежат в различных горизонтальных плоскостях $Z = \sqrt{m}\, l_1 \theta_1$, поверхность не имеет самопересечений; при этом она «разворачивает» тор $S^1 \times S^1$ по координате θ_1 в бесконечный цилиндр.

Основные свойства матрицы инерции получают на этой поверхности простое геометрическое объяснение. Во-первых, из (3.28) видно, что замена $\theta_1 \to \theta_1 + c$ при неизменном θ_2 равносильна повороту точки $\mathbf{r}$ на угол c вокруг оси Z с одновременным сдвигом на $\sqrt{m}\, l_1 c$ вдоль этой оси. Такое винтовое движение — изометрия пространства $\mathbb{R}^3$, переводящая поверхность σ в себя и сохраняющая длины касательных векторов. Поэтому коэффициенты первой квадратичной формы, а значит, и элементы матрицы инерции (3.6), не зависят от θ_1. Во-вторых, по тождеству Лагранжа определитель матрицы Грама равен квадрату модуля векторного произведения касательных векторов: $\det G_p = \| \mathbf{r}_{\theta_1} \|^2 \| \mathbf{r}_{\theta_2} \|^2 - \left(\mathbf{r}_{\theta_1} \cdot \mathbf{r}_{\theta_2}\right)^2 = \| \mathbf{r}_{\theta_1} \times \mathbf{r}_{\theta_2} \|^2$. Вычисляя векторное произведение векторов (3.29), находим:

$$\mathbf{r}_{\theta_1} \times \mathbf{r}_{\theta_2} = m l_1 l_2 \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix}, \det M = \det G_p = m^2 l_1^2 l_2^2 (1 + \sin^2\theta_2). \qquad (3.31)$$

Векторное произведение не обращается в нуль ни в одной точке, т. е. параметризация (3.28) регулярна всюду, а матрица инерции положительно определена в каждой точке конфигурационного пространства (её диагональный элемент m_{22} и определитель положительны). Отметим, что регулярность сохраняется и в сингулярных конфигурациях $\theta_2 = 0, \pm\pi$, где звенья вытянуты в одну линию: при этом касательные векторы $\mathbf{r}_{\theta_1}$ и $\mathbf{r}_{\theta_2}$ остаются неколлинеарными благодаря третьей компоненте вектора $\mathbf{r}_{\theta_1}$, т. е. благодаря массе в локте.

Из (3.31) и (3.11) получаем единичную нормаль к поверхности:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta_2}}\begin{bmatrix}-\cos(\theta_1+\theta_2)\\ -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin\theta_2\end{bmatrix}. \qquad (3.32)$$

Вычислим также вторые производные радиус-вектора (3.28), которые понадобятся в дальнейшем:

$$\mathbf{r}_{\theta_1\theta_1} = -\sqrt{m}\begin{bmatrix}l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0\end{bmatrix}, \mathbf{r}_{\theta_1\theta_2} = \mathbf{r}_{\theta_2\theta_2} = -\sqrt{m}\,l_2\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2)\\ 0\end{bmatrix}. \qquad (3.33)$$

Проекции этих векторов на нормаль, $b_{ij} = \mathbf{r}_{\theta_i\theta_j}\cdot\mathbf{n}$, являются коэффициентами *второй квадратичной формы* поверхности:

$$b_{11} = \frac{\sqrt{m}(l_2 + l_1\cos\theta_2)}{\sqrt{1+\sin^2\theta_2}}, \qquad b_{12} = b_{22} = \frac{\sqrt{m}\,l_2}{\sqrt{1+\sin^2\theta_2}}. \qquad (3.34)$$

Гауссова кривизна поверхности равна отношению определителей второй и первой квадратичных форм, $K = \det[b_{ij}]/\det G_p$. Подставляя (3.34) и (3.31), получаем (3.35):

$$K(\theta_2) = \frac{\cos\theta_2}{m l_1 l_2 (1+\sin^2\theta_2)^2}. \qquad (3.35)$$

Гауссова кривизна является *внутренним* инвариантом поверхности: по теореме Гаусса она полностью определяется коэффициентами первой квадратичной формы и их производными и потому одинакова для всех поверхностей с одной и той же метрикой. Следовательно, формула (3.35) — это кривизна самой метрики кинетической энергии двухзвенного манипулятора. Кривизна положительна при $|\theta_2| < \pi/2$ (манипулятор «разогнут»), отрицательна при $\pi/2 < |\theta_2| \le \pi$ (манипулятор сильно «сложен») и обращается в нуль при $\theta_2 = \pm\pi/2$. Отсюда, в частности, следует, что метрику (3.6) нельзя реализовать на развёртывающейся поверхности (например, на цилиндрической поверхности, получаемой переносом кривой вдоль прямой, когда один из координатных касательных векторов постоянен): гауссова кривизна таких поверхностей тождественно равна нулю.

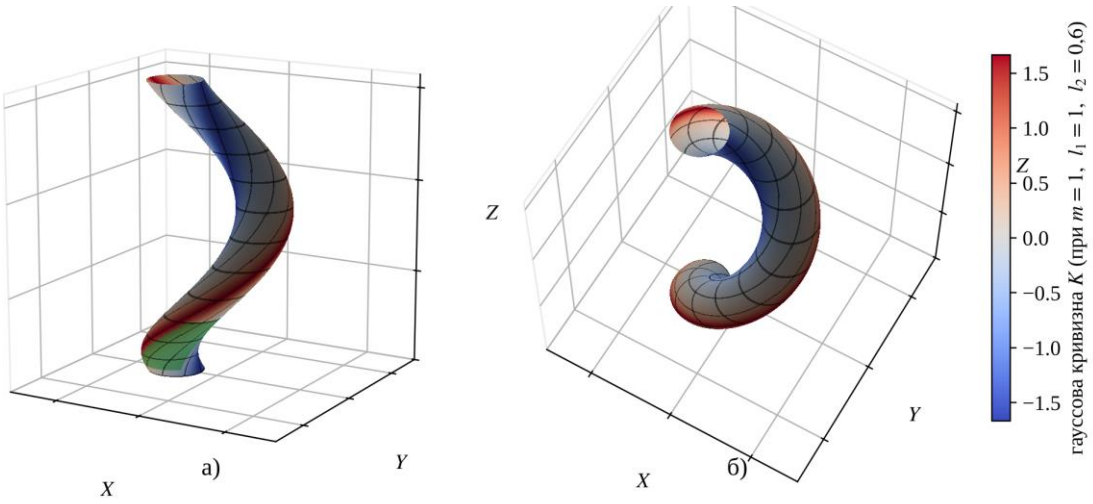


Рисунок 3.6 – Поверхность σ, первая квадратичная форма которой совпадает с метрикой кинетической энергии двухзвенного манипулятора: вид сбоку (а) и сверху (б). Цвет показывает гауссову кривизну (3.35), зелёным выделен образ рабочего пространства D; $\theta_1 \in [0,2\pi]$, $\theta_2 \in [-\pi,\pi]$

Применим к выводу уравнений свободного движения двухзвенного манипулятора принцип наименьшего действия. При свободном движении моменты приводов равны нулю, а потенциальная энергия постоянна, поэтому лагранжиан сводится к одной кинетической энергии, и в силу (3.20) действие на интервале $[t_0, t_1]$ выражается через движение изображающей точки:

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} E^{\text{к}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\, dt. \tag{3.36}$$

Таким образом, задача о свободном движении манипулятора сводится к задаче о стационарных значениях функционала (3.36) на кривых, лежащих на поверхности σ. Найдём вариацию действия, оставаясь в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть траектория $\theta_1(t), \theta_2(t)$ получает малую вариацию $\delta\theta_1(t), \delta\theta_2(t)$, обращающуюся в нуль на концах интервала. Соответствующая вариация изображающей точки есть касательный к поверхности вектор (3.37):

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\theta_1}\delta\theta_1 + \mathbf{r}_{\theta_2}\delta\theta_2 \tag{3.37}$$

Варьируя (3.36) и интегрируя по частям, получаем (3.38):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}\, dt = \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}\big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}\, dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{2} \left(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\theta_k}\right) \delta\theta_k\, dt. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Поскольку функции $\delta\theta_k(t)$ произвольны, условие стационарности $\delta S = 0$ равносильно двум уравнениям (3.39):

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\theta_1} = 0, \qquad \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\theta_2} = 0. \tag{3.39}$$

Уравнения (3.39) утверждают, что ускорение изображающей точки ортогонально обоим касательным векторам, т. е. направлено по нормали к поверхности. Кривые на поверхности, обладающие этим свойством, в классической дифференциальной геометрии называются *геодезическими линиями*. Механический смысл результата прост: изображающая точка единичной массы движется по поверхности σ как бусина по идеально гладкой поверхности — на неё действует лишь нормальная реакция связи, которая не может изменить скорость точки вдоль поверхности, но искривляет её траекторию в пространстве.

Чтобы записать (3.39) в обобщённых координатах, вычислим ускорение изображающей точки. Дифференцируя (3.10) по времени, получаем (3.40):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_{l=1}^{2} \ddot{\theta}_l \, \mathbf{r}_{\theta_l} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \dot{\theta}_i \, \dot{\theta}_j \, \mathbf{r}_{\theta_i\theta_j}. \tag{3.40}$$

Умножая (3.40) скалярно на $\mathbf{r}_{\theta_k}$ и учитывая (3.17), приводим уравнения (3.39) к виду (3.41):

$$\sum_{l=1}^{2} g_{kl} \, \ddot{\theta}_l + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \Gamma_{k,ij} \, \dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = 0, \qquad k = 1,2, \tag{3.41}$$

где введены коэффициенты:

$$\Gamma_{k,ij} = \mathbf{r}_{\theta_i\theta_j} \cdot \mathbf{r}_{\theta_k}. \tag{3.42}$$

Коэффициенты (3.42) — проекции вторых производных радиус-вектора на координатные касательные векторы — называются *символами Кристоффеля первого рода*. На первый взгляд они зависят от того, как поверхность расположена в пространстве. Покажем, что на самом деле они выражаются через одни лишь коэффициенты первой квадратичной формы. Дифференцируя равенства $g_{kj} = \mathbf{r}_{\theta_k} \cdot \mathbf{r}_{\theta_j}$ по θ_i, находим (3.43):

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial \theta_i} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ij}. \tag{3.43}$$

Записывая (3.43) ещё дважды с циклической перестановкой индексов и складывая первые два равенства с вычитанием третьего, с учётом симметрии $\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji}$ получаем (3.44):

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k}\right). \qquad (3.44)$$

Формула (3.44) показывает, что уравнения (3.41) определяются метрикой кинетической энергии $M(p) = G_p$ и её производными и, следовательно, имеют смысл независимо от существования поверхности в $\mathbb{R}^3$. Пусть g^{lk} — элементы матрицы G_p^{-1}. Разрешая (3.41) относительно вторых производных, получаем уравнения геодезических в стандартной форме (3.45)

$$\ddot{\theta}_l + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l}\ \dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = 0, \qquad \Gamma_{ij}^{l} = \sum_{k=1}^{2} g^{lk}\ \Gamma_{k,ij}, \qquad l = 1,2, \qquad (3.45)$$

где Γ_{ij}^{l} — *символы Кристоффеля второго рода*. Тем самым доказано, что любая траектория свободного движения двухзвенного манипулятора является геодезической линией метрики кинетической энергии, а её образ — геодезической линией поверхности σ.

Для поверхности (3.28) символы Кристоффеля проще всего найти непосредственно по определению (3.42), используя векторы (3.29) и (3.33). Обозначим $h = ml_1l_2\sin\theta_2$. Учитывая, что векторы $\mathbf{r}_{\theta_1\theta_2} = \mathbf{r}_{\theta_2\theta_2}$ направлены от второй массы к локтю, а вектор $\mathbf{r}_{\theta_1\theta_1}$ — от второй массы к оси первого привода, после элементарных тригонометрических преобразований получаем (3.46):

$$\Gamma_{1,11} = 0, \quad \Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = \Gamma_{1,22} = -h, \quad \Gamma_{2,11} = h, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \Gamma_{2,22} = 0. \qquad (3.46)$$

Например, $\Gamma_{1,12} = \mathbf{r}_{\theta_1\theta_2} \cdot \mathbf{r}_{\theta_1} = ml_1l_2[\cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1 - \sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1] = -ml_1l_2\sin\theta_2$. Тот же результат даёт формула (3.44) с коэффициентами (3.6), что служит дополнительной проверкой. Подставляя (3.46) в (3.41), получаем уравнения свободного движения двухзвенного манипулятора в матричной форме (3.47):

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} -2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.47)$$

Обращая матрицу инерции с учётом (3.31), находим символы второго рода:

$$\Gamma_{11}^{1} = -\frac{(l_1\cos\theta_2 + l_2)\sin\theta_2}{l_1(1+\sin^2\theta_2)}, \qquad \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{22}^{1} = -\frac{l_2\sin\theta_2}{l_1(1+\sin^2\theta_2}$$
$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{(2l_1^2 + 2l_1l_2\cos\theta_2 + l_2^2)\sin\theta_2}{l_1l_2(1+\sin^2\theta_2)}, \qquad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{22}^{2} = \frac{(l_1\cos\theta_2}{l_1(1+} \qquad (3.48)$$

Символы второго рода не зависят от массы m: форма геодезических определяется лишь геометрией манипулятора, а масса влияет только на масштаб поверхности (3.28).

Из (3.39) следует, что $d/dt \parallel \dot{\mathbf{r}} \parallel^2 = 2\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0$, так как вектор $\dot{\mathbf{r}}$ касается поверхности, а $\ddot{\mathbf{r}}$ ей ортогонален. Следовательно, изображающая точка движется по геодезической с постоянной по модулю скоростью, что в силу (3.20) выражает закон сохранения кинетической энергии свободно движущегося манипулятора. На рисунке 3.7 показан пример свободного движения манипулятора (при $m = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0{,}6$) и соответствующая ему геодезическая линия на поверхности σ.

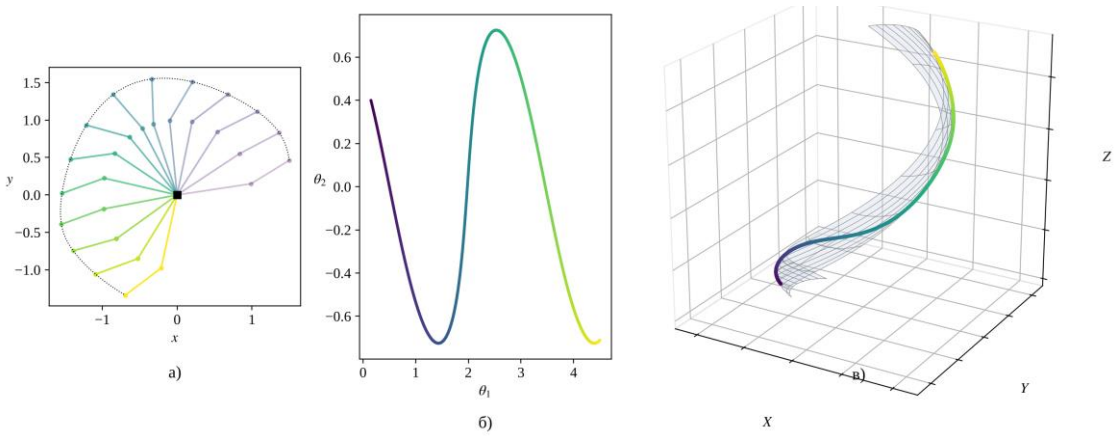


Рисунок 3.7 – Свободное движение двухзвенного манипулятора: последовательные положения манипулятора (а), траектория в конфигурационном пространстве (б) и её образ на поверхности σ — геодезическая линия (в). Цвет соответствует времени

Подставим в (3.40) разложение векторов $\mathbf{r}_{\theta_i\theta_j}$ по базису $\{\mathbf{r}_{\theta_1}, \mathbf{r}_{\theta_2}, \mathbf{n}\}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Согласно (3.42) и определению символов второго рода, касательная часть вектора $\mathbf{r}_{\theta_i\theta_j}$ равна $\sum_l \Gamma_{ij}^l \mathbf{r}_{\theta_l}$, а нормальная — $b_{ij}\mathbf{n}$ (*деривационные формулы Гаусса*):

$$\mathbf{r}_{\theta_i\theta_j} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l \, \mathbf{r}_{\theta_l} + b_{ij}\,\mathbf{n}. \tag{3.49}$$

В результате ускорение изображающей точки распадается на касательную и нормальную составляющие (3.50):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_{l=1}^{2} \left(\ddot{\theta}_l + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^l \, \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \right) \mathbf{r}_{\theta_l} + \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\,\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j \right) \mathbf{n}. \tag{3.50}$$

Касательная составляющая ускорения — ортогональная проекция $\ddot{\mathbf{r}}$ на касательную плоскость — называется *ковариантной производной* вектора

скорости вдоль кривой и обозначается $\nabla_{\mathbf{\Omega}}\mathbf{\Omega}$. В базисе $\{\mathbf{r}_{\theta_1}, \mathbf{r}_{\theta_2}\}$ её компоненты равны (3.51):

$$(\nabla_{\mathbf{\Omega}}\mathbf{\Omega})_l = \dot{\omega}_l + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l}\ \omega_i\omega_j, \qquad l = 1{,}2. \tag{3.51}$$

Нормальная составляющая $b(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega})\,\mathbf{n}$ определяется искривлением поверхности в объемлющем пространстве (рисунок 3.8). Принципиально важно, что выражение (3.51) содержит лишь компоненты матрицы инерции и их производные, т. е. имеет смысл для любой римановой метрики. Именно оно служит общим определением ковариантной производной (связности Леви-Чивиты) вдоль кривой на римановом многообразии. В этих терминах уравнения свободного движения (3.45) принимают вид $\nabla_{\mathbf{\Omega}}\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$ — аналог первого закона Ньютона: в отсутствие сил ковариантное ускорение равно нулю, а роль прямых линий играют геодезические.

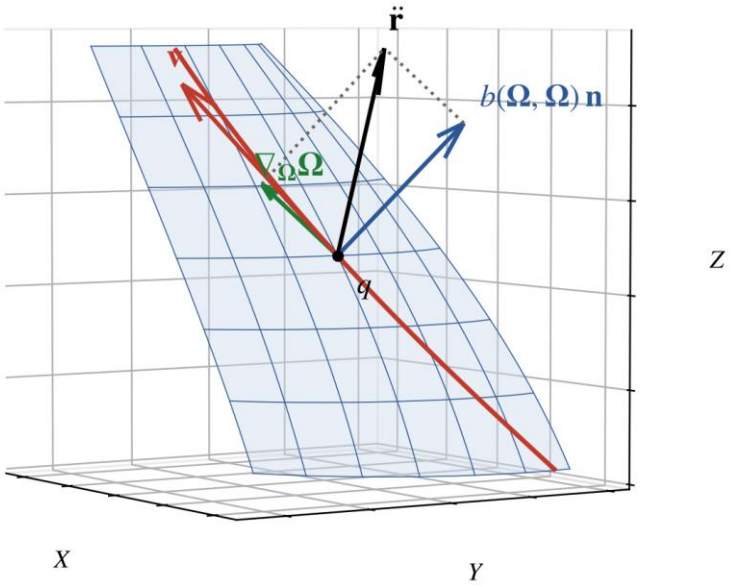


Рисунок 3.8 – Разложение ускорения $\ddot{\mathbf{r}}$ изображающей точки на касательную составляющую — ковариантную производную $\nabla_{\mathbf{\Omega}}\mathbf{\Omega}$ — и нормальную составляющую $b(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega})\mathbf{n}$

Пусть теперь к валам приводов приложены моменты τ_1, τ_2. На вариации траектории $\delta\theta_1, \delta\theta_2$ они совершают работу $\tau_1\delta\theta_1 + \tau_2\delta\theta_2$, и принцип стационарного действия принимает вид $\delta S + \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \tau_k\,\delta\theta_k\,dt = 0$. Повторяя выкладку (3.38), вместо (3.39) получаем (3.52):

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\theta_k} = \tau_k, \qquad k = 1{,}2. \tag{3.52}$$

Подставляя (3.50) в (3.52), находим (3.53):

$$\langle \nabla_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{\Omega},\ \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{l=1}^{2} m_{kl}\, (\nabla_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{\Omega})_l = \tau_k, \qquad k = 1,2, \tag{3.53}$$

или, что эквивалентно,

$$\nabla_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{\Omega} = M^{-1}(p)\, \boldsymbol{\tau}. \tag{3.54}$$

Уравнение (3.54) мы будем называть *геометродинамическим уравнением* манипулятора [73]. Оно является аналогом второго закона Ньютона: ковариантное ускорение изображающей точки равно «силе», делённой на «массу», причём роль массы играет метрика кинетической энергии. Раскрывая (3.53) с помощью (3.51) и (3.46), получаем привычные уравнения динамики двухзвенного манипулятора: они отличаются от (3.47) лишь правой частью $[\tau_1, \tau_2]^T$.

Уравнение (3.52) допускает простое истолкование в терминах изображающей точки [74, 75]. Приложим к ней касательную к поверхности силу $\mathbf{F}$, совершающую на любом перемещении $\delta\mathbf{r}$ (3.37) ту же работу, что и моменты приводов: $\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = \sum_k \tau_k\, \delta\theta_k$. Тогда $\tau_k = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_{\theta_k}$, и (3.52) означает, что касательная составляющая ускорения точки единичной массы равна приложенной к ней касательной силе, а нормальная составляющая уравновешивается реакцией поверхности. Таким образом, *динамика манипулятора совпадает с динамикой материальной точки единичной массы, движущейся по идеально гладкой поверхности σ под действием касательной силы* $\mathbf{F}$.

Обсудим смысл правой части (3.53). Вектор моментов $\boldsymbol{\tau}$ естественно рассматривать не как касательный вектор, а как *ковектор* — линейную функцию касательного вектора: значение $\sum_k \tau_k\, \omega_k$ этого функционала на векторе обобщённой скорости $\mathbf{\Omega}$ есть мощность, развиваемая приводами. Метрика позволяет отождествить касательное пространство с двойственным ему пространством ковекторов: каждому касательному вектору $\mathbf{u}$ сопоставляется функционал $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, причём это соответствие линейно, $\lambda_1 f_{\mathbf{a}} + \lambda_2 f_{\mathbf{b}} = f_{\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}}$, и взаимно однозначно. Компоненты функционала $f_{\mathbf{u}}$ равны $\sum_l m_{kl}\, u_l$, поэтому обратное соответствие задаётся умножением на M^{-1}. Уравнение (3.53) утверждает, что ковектор $\boldsymbol{\tau}$ есть функционал $f_{\nabla_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{\Omega}}$, а (3.54) — что ковариантное ускорение есть вектор, соответствующий ковектору $\boldsymbol{\tau}$. На поверхности σ этим вектором является касательная сила $\mathbf{F}$.

3.2 Тензор кинетической энергии многозвенного манипулятора

В подразделе 3.1 все построения выполнены для простейшей модели с точечными массами. Покажем, что для последовательного манипулятора с n вращательными сочленениями и звеньями произвольной формы кинетическая энергия также является квадратичной формой от вектора обобщённой скорости $\mathbf{\Omega} = [\omega_1, \ldots, \omega_n]^T$, $\omega_k = \dot{\theta}_k$, с симметричной положительно определённой

матрицей, гладко зависящей от конфигурации. Логика построения представлена на рисунке 3.9: звено рассматривается как твёрдое тело, из механики твёрдого тела используется лишь понятие тензора инерции, а связь скоростей звеньев со скоростями приводов задаётся якобианами звеньев, которые считаются известными.



Рисунок 3.9 – Последовательность построения тензора кинетической энергии манипулятора

Наряду с неподвижной (мировой) декартовой системой координат $OXYZ$ с ортонормированным базисом $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ свяжем с твёрдым телом систему координат $CX'Y'Z'$, начало которой помещено в центр масс тела C, а базис $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ также ортонормирован и правоориентирован (рисунок 3.10). Ориентацию тела будем описывать матрицей R, столбцы которой суть координаты векторов $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ в мировом базисе. Такая матрица ортогональна и имеет единичный определитель, $R^T R = E_3$, $\det R = 1$ (здесь и далее E_3 — единичная матрица третьего порядка), т. е. принадлежит группе вращений $SO(3)$; положение тела в целом задаётся парой $(R, \mathbf{r}_C)$, где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс.

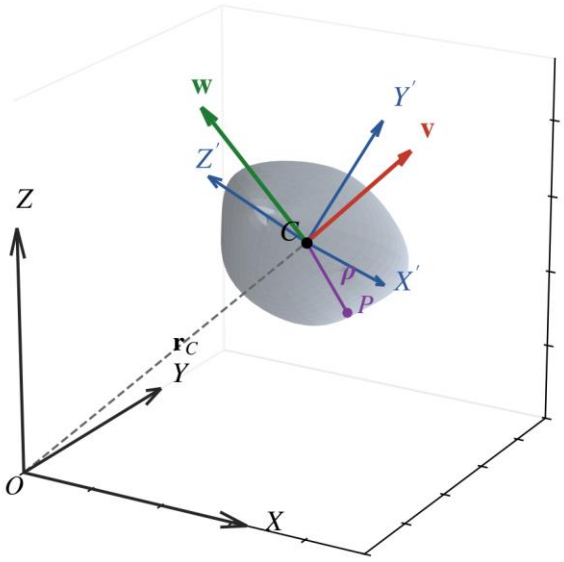


Рисунок 3.10 – Твёрдое тело с центром масс C, связанной системой координат $CX'Y'Z'$, скоростью центра масс $\mathbf{v}$ и угловой скоростью $\mathbf{w}$

Точка P тела имеет постоянные координаты $\boldsymbol{\rho}'$ в связанной системе, поэтому её радиус-вектор равен $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_C + R\boldsymbol{\rho}'$. Дифференцируя по времени и обозначая $\boldsymbol{\rho} = R\boldsymbol{\rho}'$ вектор $\overrightarrow{CP}$ в мировых координатах, получаем (3.55):

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{v} + \dot{R}R^T\boldsymbol{\rho}, \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_C. \tag{3.55}$$

Дифференцируя тождество $RR^T = E_3$, находим $\dot{R}R^T + \left(\dot{R}R^T\right)^T = 0$, т. е. матрица $\dot{R}R^T$ кососимметрична. Всякая кососимметричная матрица третьего порядка действует на векторы как векторное умножение на некоторый вектор $\mathbf{w}$: $\dot{R}R^T\mathbf{x} = \mathbf{w} \times \mathbf{x}$. Вектор $\mathbf{w}$ называется *угловой скоростью* тела, и формула (3.55) принимает вид (3.56):

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{3.56}$$

Таким образом, мгновенное распределение скоростей в твёрдом теле полностью определяется двумя векторами — скоростью центра масс $\mathbf{v}$ и угловой скоростью $\mathbf{w}$, которые удобно объединить в шестимерный вектор $\mathbf{V} = [\mathbf{v}^T,\ \mathbf{w}^T]^T$.

Кинетическая энергия тела есть интеграл по его массе от половины квадрата скорости точки. Подставляя (3.56), получаем (3.57):

$$E^{\text{к}} = \frac{1}{2}\int \|\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{\rho}\|^2 dm = \frac{1}{2} \| \mathbf{v} \|^2 \int dm + \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{w} \times \int \boldsymbol{\rho}\, dm\right) + \frac{1}{2}\int \|\mathbf{w} \times \boldsymbol{\rho}\|^2 dm. \tag{3.57}$$

Первый интеграл равен массе тела m, второй обращается в нуль, поскольку векторы $\boldsymbol{\rho}$ отсчитываются от центра масс. Для преобразования третьего слагаемого воспользуемся тождеством $\| \mathbf{w} \times \boldsymbol{\rho} \|^2 = \| \mathbf{w} \|^2 \| \boldsymbol{\rho} \|^2 - (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\rho})^2 = \mathbf{w}^T(\| \boldsymbol{\rho} \|^2 E_3 - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T)\mathbf{w}$. Вынося $\mathbf{w}$ за знак интеграла и учитывая $\boldsymbol{\rho} = R\boldsymbol{\rho}'$, получаем (3.58)

$$\int \|\mathbf{w} \times \boldsymbol{\rho}\|^2 dm = \mathbf{w}^T R\, \mathbb{I}\, R^T \mathbf{w}, \qquad \mathbb{I} = \int (\| \boldsymbol{\rho}' \|^2 E_3 - \boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{\rho}'^T) dm. \tag{3.58}$$

Симметричная матрица $\mathbb{I}$, вычисленная в осях $CX'Y'Z'$, называется матрицей *тензора инерции* тела (центрального тензора инерции). Она постоянна и вместе с массой m полностью характеризует инерционные свойства тела; в мировых же осях тензору инерции отвечает матрица $R\,\mathbb{I}\,R^T$, которая меняется при повороте тела. Поскольку $\mathbf{w}^T R\,\mathbb{I}\,R^T\mathbf{w} = \int \| \mathbf{w} \times \boldsymbol{\rho} \|^2\, dm$, тензор инерции положительно определён для любого тела, точки которого не лежат на одной прямой. Итак, кинетическая энергия твёрдого тела равна (3.59):

$$E^{\text{к}} = \frac{1}{2} m \| \mathbf{v} \|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{w}^T R\, \mathbb{I}\, R^T \mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbb{M}\, \mathbf{V}, \qquad \mathbb{M} = \begin{bmatrix} mE_3 & 0 \\ 0 & R\,\mathbb{I}\,R^T \end{bmatrix}, \tag{3.59}$$

т. е. является квадратичной формой от шестимерного вектора скоростей тела с симметричной положительно определённой блочно-диагональной матрицей $\mathbb{M}$ размера 6×6 (первое слагаемое — энергия поступательного движения вместе с центром масс, второе — энергия вращения вокруг центра масс) [76].

Пусть теперь манипулятор имеет n вращательных сочленений, соединяющих последовательную цепь звеньев с закреплённым основанием. Его конфигурация задаётся вектором углов $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$, а конфигурационное пространство (без учёта ограничений на углы) есть n-мерный тор $C = T^n$. Звено с номером k будем рассматривать как твёрдое тело массы m_k с матрицей тензора инерции $\mathbb{I}_k$ относительно центра масс; через $R_k(\boldsymbol{\theta})$ обозначим матрицу его ориентации, а через $\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_k^T,\ \mathbf{w}_k^T]^T$ — шестимерный вектор его скоростей.

Будем считать известным следующий факт кинематики манипуляторов: скорость центра масс и угловая скорость каждого звена линейно выражаются через угловые скорости приводов:

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix} = \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{v,k}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathcal{J}_{w,k}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{3.60}$$

где $\mathcal{J}_k(\boldsymbol{\theta})$ — *якобиан звена* — матрица размера $6 \times n$, элементы которой гладко зависят от конфигурации. Поскольку движение k-го звена не зависит от сочленений с номерами, большими k, столбцы матрицы $\mathcal{J}_k$ с номерами $k+1, \dots, n$ нулевые. Способы вычисления якобианов звеньев относятся к кинематике манипуляторов и в данной работе не рассматриваются: для дальнейшего существенно лишь существование линейной зависимости (3.60).

Подставляя (3.60) в выражение (3.59) для энергии k-го звена и суммируя по звеньям, получаем (3.61):

$$\begin{aligned} E^{\text{к}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \mathbf{V}_k^T \mathbb{M}_k \mathbf{V}_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T G(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\Omega}, \qquad G(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{J}_k^T\,(\boldsymbol{\theta})\, \mathbb{M}_k(\boldsymbol{\theta})\, \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \tag{3.61}$$

где $\mathbb{M}_k = \operatorname{diag}(m_k E_3,\ R_k \mathbb{I}_k R_k^T)$. С учётом блочной структуры матриц выражение для G можно записать и в развёрнутом виде (3.62):

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \left(m_k\, \mathcal{J}_{v,k}^T \mathcal{J}_{v,k} + \mathcal{J}_{w,k}^T\, R_k \mathbb{I}_k R_k^T\, \mathcal{J}_{w,k} \right). \tag{3.62}$$

Матрицу $G(\boldsymbol{\theta})$, элементы которой мы по-прежнему будем обозначать g_{ij}, будем называть матрицей *тензора кинетической энергии* манипулятора. Установим её свойства.

Симметричность G очевидна из (3.61), так как матрицы $\mathbb{M}_k$ симметричны. Элементы G — гладкие функции конфигурации, поскольку таковы элементы якобианов звеньев и матриц ориентации. Докажем положительную определённость, предполагая, что тензоры инерции звеньев положительно определены. Для произвольного $\mathbf{\Omega}$ из (3.61) следует $\mathbf{\Omega}^T G \mathbf{\Omega} = \sum_k \mathbf{V}_k^T \mathbb{M}_k \mathbf{V}_k \geq 0$, причём равенство нулю возможно лишь при $\mathbf{V}_k = \mathbf{0}$ для всех k, т. е. когда все звенья неподвижны. Но угловая скорость k-го звена складывается из угловой скорости предыдущего звена и угловой скорости относительного вращения в k-м сочленении: $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \omega_k \mathbf{a}_k$, где $\mathbf{a}_k$ — единичный вектор оси сочленения, а $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ (основание неподвижно). Поэтому из $\mathbf{w}_1 = \cdots = \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$ последовательно следует $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$, т. е. $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$. Итак, квадратичная форма $\mathbf{\Omega}^T G(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{\Omega}$ обращается в нуль только при нулевой обобщённой скорости, причём при любом $\boldsymbol{\theta}$, в том числе в кинематически сингулярных конфигурациях. Поэтому поле матриц $G(\boldsymbol{\theta})$ является римановой метрикой, определённой на всём торе $C = T^n$ без исключения каких-либо точек.

Для модели подраздела 3.1 звенья невесомы, а массы сосредоточены в точках, так что вклады в (3.62) дают лишь первые слагаемые с якобианами положений масс; в этом случае формула (3.62) приводит к матрице (3.6). Положительная определённость для этой модели была установлена в пункте 3.1.5 непосредственно, с помощью векторного произведения (3.31).

Покажем, что для многозвенного манипулятора остаётся справедливой геометрическая картина подраздела 3.1: метрику (3.61) можно реализовать как первую квадратичную форму n-мерной «поверхности» в евклидовом пространстве достаточно большой размерности. Воспользуемся известным фактом механики: любое твёрдое тело динамически эквивалентно системе конечного числа жёстко связанных с ним точечных масс, имеющей ту же массу, тот же центр масс и тот же тензор инерции [77, 78]. Действительно, кинетическая энергия (3.59) зависит только от m, положения центра масс и $\mathbb{I}$; в качестве эквивалентной системы можно взять, например, массу в центре масс и три пары равных масс, расположенных симметрично относительно центра масс на главных осях инерции, подобрав их величины и расстояния до центра так, чтобы совпали соответствующие моменты второго порядка. Заменив так каждое звено, получим систему точечных масс $\mu_s > 0$ с радиус-векторами $\mathbf{p}_s(\boldsymbol{\theta})$, $s = 1, \ldots, N$, кинетическая энергия которой при любом движении совпадает с энергией манипулятора. Определим отображение следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\sqrt{\mu_1}\,\mathbf{p}_1^T(\boldsymbol{\theta}),\ \ldots,\ \sqrt{\mu_N}\,\mathbf{p}_N^T(\boldsymbol{\theta})\right]^T \in \mathbb{R}^{3N}. \tag{3.63}$$

Тогда $E^{\text{к}} = 1/2 \sum_s \mu_s \parallel \dot{\mathbf{p}}_s \parallel^2 = 1/2 \parallel \dot{\mathbf{\Phi}} \parallel^2$, и, следовательно,

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \theta_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3.64}$$

т. е. тензор кинетической энергии есть матрица Грама касательных векторов $\mathbf{\Phi}_{\theta_1}, \dots, \mathbf{\Phi}_{\theta_n}$ к n-мерному образу конфигурационного пространства в $\mathbb{R}^{3N}$ — прямое обобщение формулы (3.17). Поверхность (3.28) двухзвенного манипулятора получается из (3.63) (при $\mu_1 = \mu_2 = m$) заменой двух координат массы в локте, движущейся по окружности, одной координатой $\sqrt{m}\, l_1 \theta_1$.

После этого все выкладки пунктов 3.1.6 и 3.1.7 переносятся на многозвенный манипулятор дословно, с заменой $\mathbf{r}$ на $\mathbf{\Phi}$ и верхних пределов суммирования 2 на n. Если манипулятор движется в поле силы тяжести с потенциальной энергией $U(\boldsymbol{\theta})$, к моментам приводов добавляются обобщённые силы тяжести $-\partial U / \partial \theta_k$. Уравнения движения принимают вид (3.65):

$$\ddot{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathbf{\Phi}_{\theta_k} = \tau_k - \frac{\partial U}{\partial \theta_k}, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{3.65}$$

символы Кристоффеля по-прежнему определяются формулой (3.44) через элементы матрицы G, ковариантная производная — формулой (3.51) с суммированием до n, а геометродинамическое уравнение n-звенного манипулятора записывается в той же форме, что и (3.54):

$$\nabla_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega} = G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\boldsymbol{\tau} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right). \tag{3.66}$$

Таким образом, любой последовательный манипулятор имеет уравнение динамики того же вида, что и двухзвенный, с тем же геометрическим смыслом: ковариантное ускорение — это касательная составляющая ускорения изображающей точки $\mathbf{\Phi}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)$, а моменты приводов — проекции приложенной к ней касательной силы на координатные касательные векторы. Подчеркнём, что для вычислений вложение (3.63) не требуется: все величины в (3.66) выражаются через матрицу $G(\boldsymbol{\theta})$ и её производные.

3.3 Линеаризация уравнения динамики статической обратной связью

Уравнения (3.52) и (3.65) непосредственно указывают, как следует выбирать моменты приводов, чтобы придать движению манипулятора требуемый характер. Изложим соответствующее построение сначала для двухзвенного манипулятора, а затем для общего случая.

Пусть требуется, чтобы в текущем состоянии $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega})$ вторые производные углов были равны заданным величинам u_1, u_2, которые будем рассматривать как новое управление. Если бы это требование выполнялось, то, согласно (3.40), ускорение изображающей точки было бы равно (3.67)

$$\mathbf{a}_u = \sum_{l=1}^{2} u_l \; \mathbf{r}_{\theta_l} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \omega_i \, \omega_j \, \mathbf{r}_{\theta_i \theta_j}. \tag{3.67}$$

Нормальную составляющую этого ускорения обеспечит реакция поверхности; моменты же приводов должны обеспечить его касательную составляющую. В силу (3.52) для этого достаточно положить моменты равными проекциям требуемого ускорения на координатные касательные векторы (3.68):

$$\tau_k = \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{r}_{\theta_k} = \sum_{l=1}^{2} m_{kl}(\boldsymbol{\theta})\, u_l + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \Gamma_{k,ij}(\boldsymbol{\theta})\, \omega_i \omega_j, k = 1{,}2. \qquad (3.68)$$

Действительно, подставляя (3.68) в (3.52) и учитывая (3.40), получаем $(\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{a}_u) \cdot \mathbf{r}_{\theta_k} = \sum_l m_{kl}\left(\ddot{\theta}_l - u_l\right) = 0,\ k = 1{,}2$, откуда в силу невырожденности матрицы инерции (3.69):

$$\ddot{\theta}_1 = u_1, \qquad \ddot{\theta}_2 = u_2. \qquad (3.69)$$

Таким образом, замкнутая система распадается на два независимых двойных интегратора. Закон (3.68) является статической (безынерционной) обратной связью по состоянию: моменты в каждый момент времени вычисляются по текущим значениям углов, скоростей и нового управления, без использования каких-либо дополнительных динамических переменных. Для двухзвенного манипулятора с учётом (3.46) закон (3.68) принимает явный вид

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_{11}u_1 + m_{12}u_2 - ml_1l_2\sin\theta_2(2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2), \\ \tau_2 &= m_{21}u_1 + m_{22}u_2 + ml_1l_2\sin\theta_2\,\omega_1^2. \end{aligned} \qquad (3.70)$$

Для n-звенного манипулятора те же рассуждения, применённые к уравнению (3.65) и изображающей точке **Ф**, дают закон (3.71):

$$\tau_k = \sum_{l=1}^{n} g_{kl}(\boldsymbol{\theta})\, u_l + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{k,ij}(\boldsymbol{\theta})\, \omega_i \omega_j + \frac{\partial U}{\partial \theta_k}, \qquad k = 1, \dots, n, \qquad (3.71)$$

приводящий уравнение (3.66) к виду $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{u}$. В терминах ковариантной производной закон (3.71) означает, что моменты приводов создают ковариантное ускорение $\nabla_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega}$ с компонентами $u_l + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{l}\, \omega_i \omega_j$ и компенсируют силы тяжести. Иначе говоря, приводы непрерывно «доворачивают» вектор скорости изображающей точки так, чтобы компенсировать ту часть изменения координатного базиса $\{\mathbf{r}_{\theta_l}\}$ вдоль траектории, которая в отсутствие управления искривляла бы траекторию в координатах $\boldsymbol{\theta}$. В матричной записи закон (3.71) — это хорошо известный закон управления с вычисляемым моментом, что подтверждает эквивалентность геометродинамического уравнения (3.66) классическому матричному уравнению динамики манипулятора.

Геометрическая форма закона (3.68) удобна и для анализа влияния неточности модели. Если вместо истинной изображающей точки **r** (или **Ф**) регулятор использует модельную — построенную по оценкам масс, длин и тензоров инерции звеньев, — то моменты вычисляются как проекции модельного требуемого ускорения на модельные касательные векторы. Возникающая при этом ошибка в правой части (3.69) выражается через рассогласование истинной и модельной метрик и их символов Кристоффеля, т. е. через различие двух «поверхностей» — истинной и модельной. Такое представление возмущений используется в последующих разделах работы при синтезе робастных и адаптивных законов управления.

3.4 Компьютерная проверка геометрического представления и линеаризации динамики

Современные подходы к совместному использованию математического моделирования динамики роботов и компьютерной симуляции представлены в работе [79], где применены ANSYS и MATLAB/Simulink для исследования динамического поведения манипулятора. В настоящем подразделе MATLAB/Simulink используется для проверки эквивалентности классического лагранжева и дифференциально-геометрического представлений динамики, а также точности линеаризации статической обратной связью.

В соответствии с результатами подраздела 3.3 матрица инерции манипулятора определяет риманову метрику его конфигурационного пространства, а инерционные взаимодействия звеньев могут быть описаны посредством соответствующих символов Кристоффеля. Такое представление позволяет рассматривать движение манипулятора с геометрической точки зрения и установить связь между традиционной формой уравнений динамики и их дифференциально-геометрическим представлением.

Для компьютерной проверки разработана модель двухзвенного манипулятора, включающая две параллельные реализации его динамики. Первая реализация основана на классических уравнениях Лагранжа с учетом инерционных, кориолисовых, центробежных и гравитационных составляющих. Во второй реализации динамика манипулятора представлена в геометрической форме с использованием метрического тензора и символов Кристоффеля.

Обе модели получают одинаковые управляющие моменты, формируемые регулятором на основе метода вычисляемых моментов. Регулятор использует заданную траекторию движения и текущие значения обобщенных координат и скоростей, получаемые из лагранжевой модели. Это позволяет обеспечить одинаковые управляющие воздействия на обе модели и выполнить сравнительную оценку их динамических характеристик.

Для реализации численного интегрирования уравнений движения используются последовательно соединенные интеграторы, обеспечивающие определение обобщенных скоростей и координат сочленений по вычисленным ускорениям. Выходные сигналы позволяют регистрировать траектории, оценивать ошибки слежения и выявлять расхождения между двумя

математическими представлениями динамики. Структурная схема разработанной компьютерной модели приведена на рисунке 3.11.

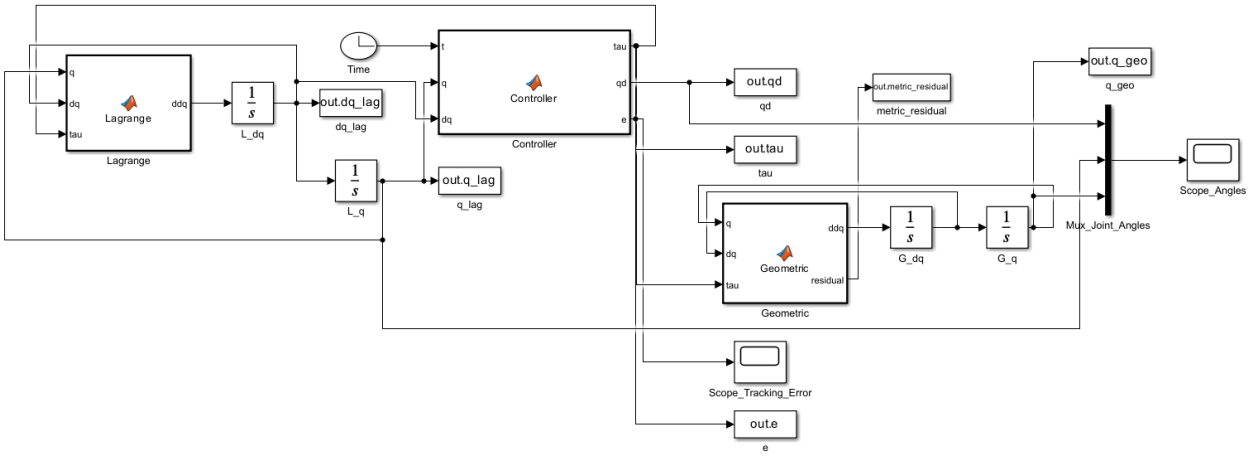


Рисунок 3.11 – Структурная схема компьютерной модели двухзвенного робота-манипулятора для проверки эквивалентности лагранжева и геометрического представлений динамики в среде MATLAB/Simulink

Как показано на рисунке 3.11, модель включает функциональные блоки, в каждом из которых блоков вычисляются обобщенные ускорения сочленений, которые последовательно интегрируются для получения скоростей и угловых координат.

На рисунке 3.12 представлены результаты компьютерного моделирования траекторного движения двухзвенного робота-манипулятора, полученные в среде MATLAB/Simulink. На графике показаны заданные траектории движения первого и второго сочленений, а также фактические траектории, рассчитанные на основе лагранжева и дифференциально-геометрического представлений динамики.

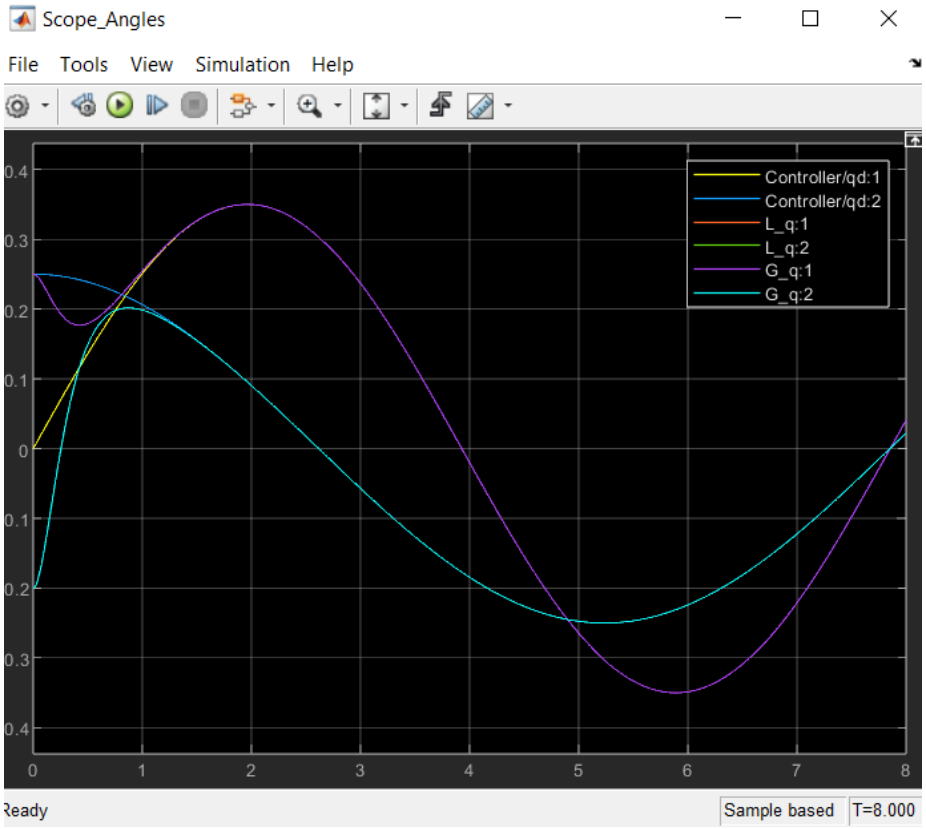


Рисунок 3.12 – Сравнение заданных и фактических траекторий движения двухзвенного робота-манипулятора в лагранжевой и геометрической моделях

Регулятор уменьшает ошибки, вызванные различием начальных условий, и после переходного процесса обеспечивает устойчивое слежение как показано на рисунке 3.12.

Практически полное совпадение траекторий на всём интервале моделирования свидетельствует о согласованности лагранжева описания динамики с дифференциально-геометрическим, основанным на римановой метрике и символах Кристоффеля.

Результаты согласуются с теорией линеаризации статической обратной связью и подтверждают корректность компьютерной модели в рассмотренных условиях.

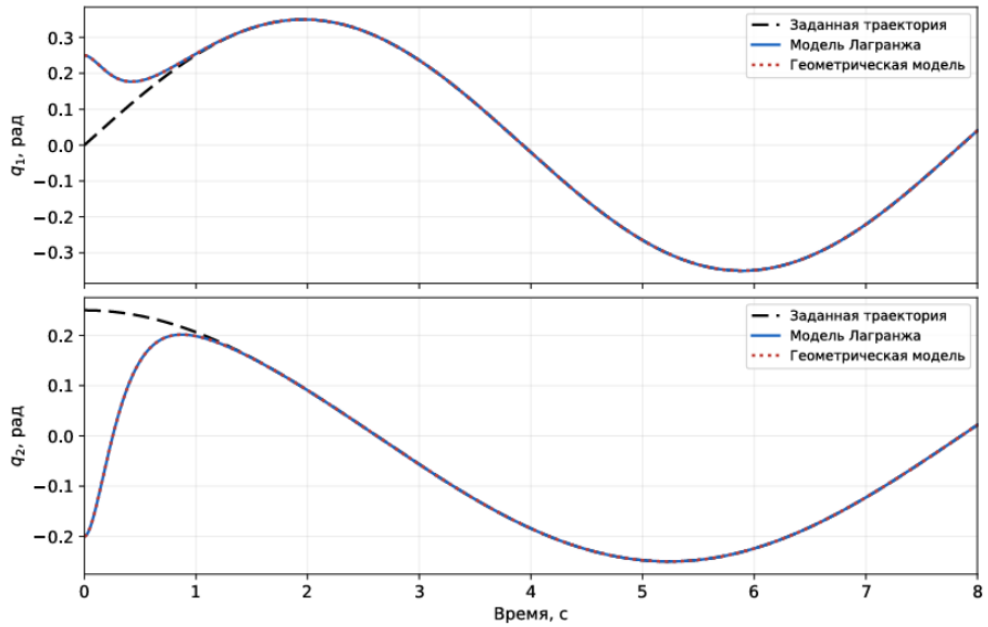


Рисунок 3.13 – Сравнение заданных и фактических траекторий движения двухзвенного робота-манипулятора в лагранжевой и геометрической моделях

СТС-регулятор уменьшает ошибки, вызванные различием начальных условий, после чего фактические траектории практически совпадают с заданными (рисунок 3.13). Почти полное совпадение результатов лагранжевой и геометрической моделей двухзвенного манипулятора на всём интервале моделирования численно подтверждает их эквивалентность в исследованных условиях. Это согласуется с теоретическими результатами подразделов 3.3 и 3.4 и подтверждает корректность реализации геометрической модели при линеаризации статической обратной связью.

На рисунке 3.14 показано изменение ошибок слежения первого и второго сочленений при использовании СТС-регулятора.

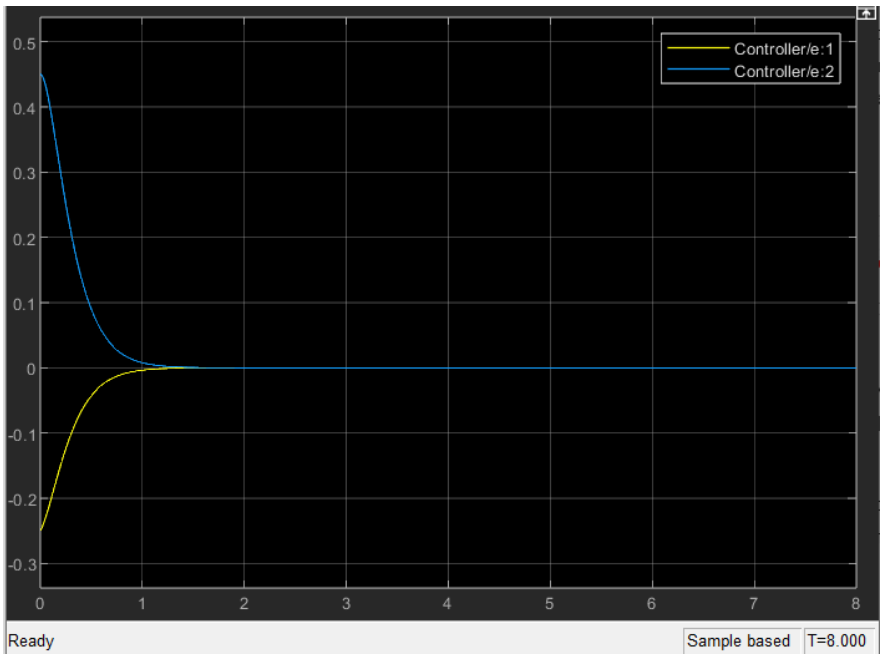


Рисунок 3.14 – Сравнение заданных и фактических траекторий движения двухзвенного робота-манипулятора в лагранжевой и геометрической моделях

Характер изменения ошибок свидетельствует об устойчивом затухании переходных процессов без выраженных колебаний. Полученные результаты согласуются с теоретическими условиями стабилизации линеаризованной системы и подтверждают эффективность компенсации нелинейной динамики манипулятора посредством статической обратной связи в исследованных номинальных условиях.

Таким образом, компьютерное моделирование демонстрирует возможность обеспечения точного траекторного слежения двухзвенного манипулятора при использовании метода вычисляемых моментов и согласуется с теоретическими результатами линеаризации динамики, полученными в подразделе 3.4.

Касательные векторы поверхности (3.28) вычислялись численным дифференцированием в 3600 точках, равномерно покрывающих всё конфигурационное пространство, и по ним строилась матрица Грама (3.17). Её наибольшее отклонение от матрицы инерции (3.6) составило $4{,}0 \cdot 10^{-10}$ кг·м^2, что соответствует погрешности численного дифференцирования. Тем самым подтверждено, что первая квадратичная форма поверхности совпадает с метрикой кинетической энергии.

Гауссова кривизна вычислялась двумя независимыми способами: по форме поверхности в пространстве, т. е. через её вторую квадратичную форму, и по одной лишь матрице инерции манипулятора с помощью известной формулы Бриоски, не использующей поверхность. Результаты для 41 значения угла второго звена приведены на рисунке 3.15. Оба расчёта совпали с аналитической формулой (3.35) во всех точках с погрешностью не более $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ кг$^{-1}$·м$^{-2}$ при наибольшем значении кривизны 1,67 кг$^{-1}$·м$^{-2}$. Совпадение двух способов служит

численной иллюстрацией теоремы Гаусса: кривизна, найденная по форме поверхности, совпадает с кривизной, вычисленной по матрице инерции, т. е. является свойством самого манипулятора, а не выбранной поверхности.

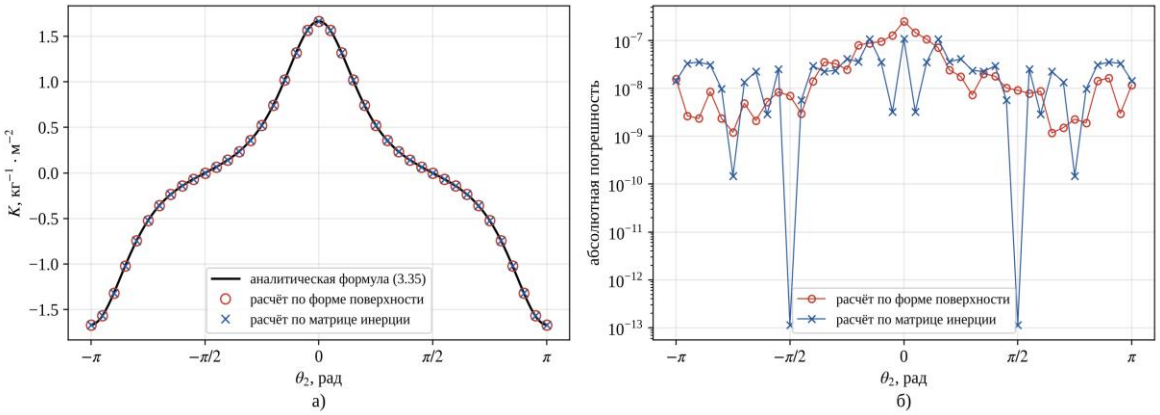


Рисунок 3.15 – Гауссова кривизна метрики кинетической энергии в зависимости от угла второго звена: аналитическая формула и два численных расчёта (а); погрешности численных расчётов (б)

Модель А — это уравнения динамики двухзвенного манипулятора (3.47), в правую часть которых подставлены моменты приводов; они интегрируются относительно углов звеньев и угловых скоростей приводов.

Модель Б описывает движение материальной точки единичной массы по поверхности σ непосредственно в декартовых координатах трёхмерного пространства. Поверхность при этом задаётся неявно — как множество точек, проекция которых на горизонтальную плоскость удалена от соответствующей точки винтовой линии, описываемой локтем, на постоянное расстояние, определяемое длиной второго звена. Точка удерживается на поверхности силой реакции, направленной по нормали к поверхности; величина реакции в каждый момент определяется из условия, что точка не покидает поверхность. Моменты приводов заменяются эквивалентной касательной силой, совершающей на любом перемещении точки ту же работу, что и моменты. По рассчитанному положению точки углы звеньев восстанавливаются геометрически: высота точки определяет угол первого звена, а направление от проекции локтя к проекции точки — угол второго звена.

При свободном движении модель Б не содержит ни матрицы инерции, ни символов Кристоффеля — в неё входит только геометрия поверхности. Поэтому совпадение решений двух моделей является содержательной проверкой утверждения о том, что движение манипулятора есть движение изображающей точки по поверхности, а траектории его свободного движения — геодезические линии этой поверхности.

Обе модели рассчитывались на интервале 10 с при тех же начальных условиях, что и на рисунке 3.7. Рассмотрены свободное движение и движение под действием гармонических моментов приводов с амплитудами 0,6 и 0,25 Н·м. Результаты представлены на рисунке 3.16. Траектории двух моделей совпадают: наибольшее расхождение углов звеньев на всём интервале составило $5{,}4 \cdot 10^{-12}$

рад при свободном движении и $1{,}8\cdot10^{-11}$ рад при управляемом. Уклонение точки от поверхности в модели Б не превысило $4{,}8\cdot10^{-12}$ кг·м^2. Расхождение медленно накапливается со временем, и его уровень определяется заданной точностью интегрирования.

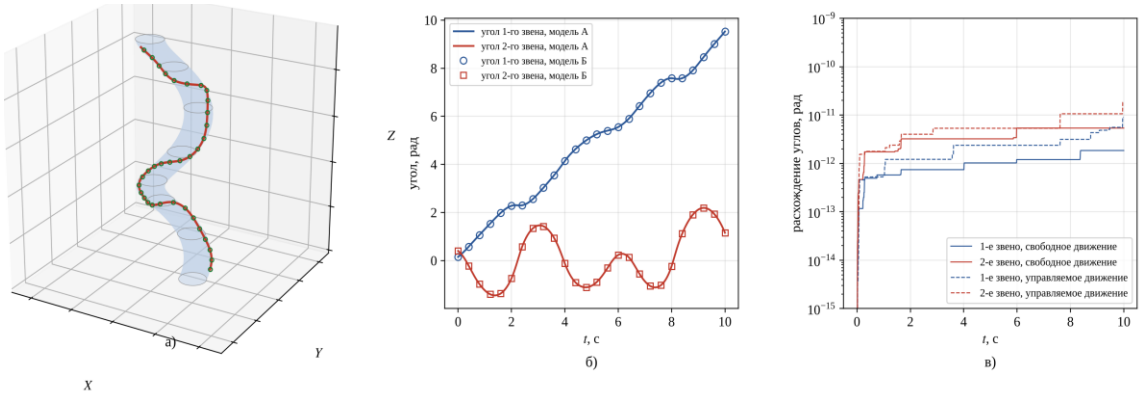


Рисунок 3.16 – Сравнение моделей А и Б при управляемом движении: траектория изображающей точки, рассчитанная в трёхмерном пространстве (линия), и точки траектории модели А, перенесённые на поверхность (кружки) (а); углы звеньев в моделях А и Б (б); наибольшее накопленное расхождение углов при свободном и управляемом движении (в)

По решению модели А для свободного движения в каждый момент вычислялось ускорение изображающей точки (3.40) и его разложение на касательную и нормальную составляющие (3.50). Касательная составляющая на всём интервале не превысила $7{,}7\cdot10^{-16}$ от полного ускорения, т. е. ускорение изображающей точки направлено строго по нормали к поверхности с точностью до ошибок округления, как и утверждают уравнения (3.39). Поскольку в модели А используются символы Кристоффеля (3.46), а касательная составляющая вычислялась непосредственно по векторам поверхности, этот результат подтверждает также правильность формул (3.42) и (3.46).

Нормальное ускорение, найденное по модели А, сравнивалось с ускорением, которое сообщает точке реакция поверхности в модели Б (рисунок 3.17). Обе величины изменялись в пределах от 0,50 до 1,45 кг$^{1/2}$·м/с^2 и различались не более чем на $2{,}8\cdot10^{-12}$ кг$^{1/2}$·м/с^2. Модуль скорости изображающей точки при этом оставался постоянным с относительной точностью $6{,}0\cdot10^{-13}$, что выражает закон сохранения кинетической энергии при свободном движении.

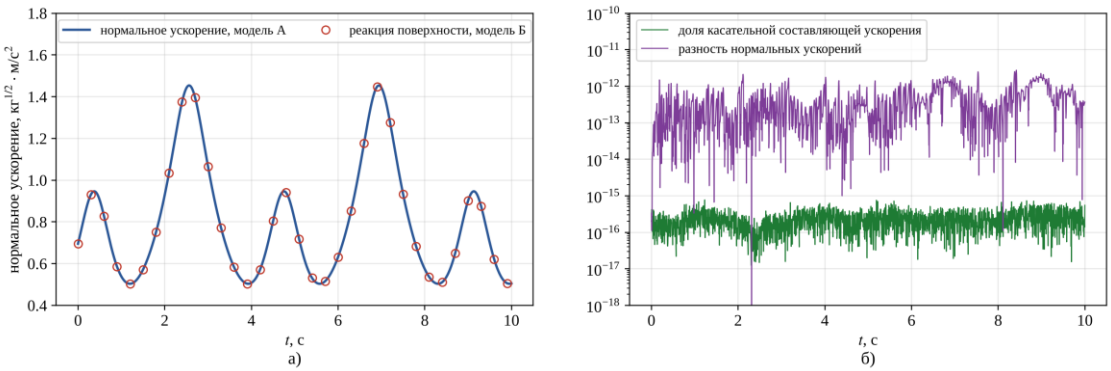


Рисунок 3.17 – Нормальное ускорение изображающей точки при свободном движении по моделям А и Б (а); доля касательной составляющей ускорения и разность нормальных ускорений двух моделей (б)

Модель А замыкалась обратной связью (3.68) с новым управлением в виде гармонических сигналов, задающих требуемые угловые ускорения звеньев. При точно известных параметрах движение замкнутой системы должно совпадать с движением двух независимых двойных интеграторов, которое в данном случае вычисляется аналитически. Наибольшее отклонение решения замкнутой нелинейной системы от аналитического решения на интервале 6 с составило $1{,}0 \cdot 10^{-11}$ рад, а отклонение угловых ускорений от заданных — $2{,}6 \cdot 10^{-15}$ рад/с^2 (рисунок 3.18, а). Тем самым подтверждено, что обратная связь (3.68) приводит динамику манипулятора к линейному виду (3.69).

Затем рассмотрены случаи, когда регулятор вычисляет моменты по неточной модели, т. е. проецирует требуемое ускорение на касательные векторы не истинной, а модельной поверхности. Исследованы ошибка в длине второго звена и ошибка в массе грузов, обе по 10 %. Ошибка линеаризации — разность между фактическими и заданными угловыми ускорениями — естественным образом распадается на две части. Первая обусловлена различием матриц инерции, т. е. первых квадратичных форм истинной и модельной поверхностей, вторая — различием их символов Кристоффеля. При ошибке только в массе модельная поверхность отличается от истинной лишь масштабом, и ошибка линеаризации оказывается пропорциональной заданному ковариантному ускорению. Ошибка в длине звена меняет форму поверхности, в том числе её кривизну, и в ошибке присутствуют обе части.

Наибольшая ошибка линеаризации составила 0,58 рад/с^2 при ошибке длины звена и 0,40 рад/с^2 при ошибке массы. Поскольку в эксперименте отсутствует внешний контур обратной связи, ошибка ускорения дважды интегрируется, и к концу интервала отклонение углов от идеального движения достигает 2,6 и 1,4 рад соответственно. Из рисунка 3.18, б, в видно, что при ошибке длины звена преобладает часть, связанная с различием матриц инерции, а при ошибке массы на участках с большими скоростями преобладает часть, связанная с различием символов Кристоффеля.

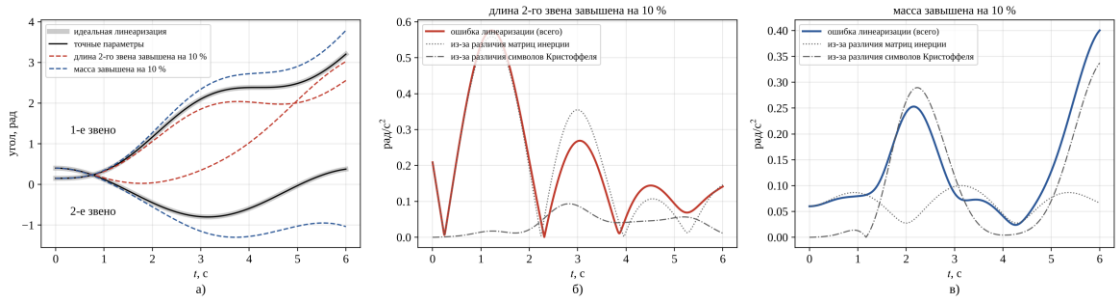


Рисунок 3.18 – Линеаризация обратной связью (3.68): углы звеньев при точных и ошибочных параметрах модели в сравнении с идеальной линеаризацией (а); ошибка линеаризации и её составляющие при ошибке длины второго звена (б) и при ошибке массы (в)

Результаты всех проверок сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты компьютерной проверки геометрического представления динамики

Проверяемое утверждение	Что сравнивалось	Наибольшее расхождение
Поверхность воспроизводит метрику кинетической энергии	матрица Грама поверхности и матрица инерции	$4{,}0\cdot10^{-10}$ кг·м^2
Кривизна — свойство самой метрики	численные расчёты кривизны и формула (3.35)	$2{,}5\cdot10^{-7}$ кг$^{-1}$·м$^{-2}$
Динамика манипулятора совпадает с движением точки по поверхности (свободное движение)	углы звеньев в моделях А и Б	$5{,}4\cdot10^{-12}$ рад
То же, управляемое движение	углы звеньев в моделях А и Б	$1{,}8\cdot10^{-11}$ рад
Свободное движение — геодезическое	доля касательной составляющей ускорения	$7{,}7\cdot10^{-16}$
Нормальное ускорение создаётся реакцией поверхности	нормальное ускорение (модель А) и реакция (модель Б)	$2{,}8\cdot10^{-12}$ кг$^{1/2}$·м/с^2
Сохранение кинетической энергии	относительное изменение скорости изображающей точки	$6{,}0\cdot10^{-13}$
Точная линеаризация обратной связью	углы замкнутой системы и аналитическое решение	$1{,}0\cdot10^{-11}$ рад

Во всех проверках расхождения находятся на уровне погрешностей округления, численного дифференцирования или численного интегрирования.

Тем самым подтверждены изометричность построенной поверхности, внутренний характер её кривизны, совпадение динамики манипулятора с движением изображающей точки по идеально гладкой поверхности и точность линеаризации статической обратной связью. Эксперименты с неточными параметрами показывают, что при ошибках модели линеаризация нарушается, причём возникающее возмущение определяется различием истинной и модельной поверхностей и без внешнего контура обратной связи быстро накапливается. Это мотивирует синтез робастного закона траекторного управления, которому посвящён раздел 4.

Вывод по разделу 3:

В разделе 3 исследована геометрическая интерпретация динамики последовательного робота-манипулятора и получены следующие основные результаты. Для двухзвенного планарного манипулятора построена геометрическая модель в виде движения изображающей точки по двумерной поверхности в трёхмерном пространстве. Установлено соответствие между кинетической энергией манипулятора и первой квадратичной формой поверхности.

Получены выражения для метрического тензора, символов Кристоффеля и гауссовой кривизны. Показано, что свободное движение манипулятора соответствует движению по геодезическим линиям метрики кинетической энергии.

Получено геометродинамическое уравнение манипулятора с использованием ковариантной производной. Геометрическое представление обобщено на многозвенный последовательный манипулятор. Установлены симметричность, гладкость и положительная определённость тензора кинетической энергии при принятых предположениях.

Обоснована возможность точной линеаризации динамики манипулятора посредством статической обратной связи. Показано, что при точном знании параметров модели нелинейная система преобразуется к системе независимых двойных интеграторов, а полученный закон управления соответствует методу вычисляемых моментов.

Компьютерное моделирование подтвердило согласованность геометрического и классического представлений динамики. Показано, что параметрические неопределённости нарушают точность линеаризации.

Таким образом, полученные результаты обосновывают второе научное положение, выносимое на защиту, — «Геометрическая интерпретация динамики манипулятора и линеаризация статической обратной связью», и формируют теоретическую основу для разработки робастного траекторного управления. Связанные с данным направлением вопросы геометрического описания кривых, планирования траекторий манипулятора и применения матричных методов рассмотрены в публикациях автора [70–72].

4 НЕЛИНЕЙНОЕ РОБАСТНОЕ ТРАЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ

4.1 Постановка задачи робастного траекторного управления

Задача траекторного управления состоит в формировании моментов приводов, обеспечивающих движение манипулятора по заданной гладкой траектории. При точной модели нелинейность объекта может быть компенсирована методом вычисляемых моментов. При несовпадении параметров объекта и регулятора компенсация становится неполной, и уравнение ошибки содержит остаточное воздействие. Поэтому необходим закон, устойчивость которого устанавливается при ограниченной неопределенности, а не только в номинальном режиме.

Ранее вопросы нелинейного управления роботом-манипулятором с использованием прогнозирующей модели рассматривались в работе [80]. Полученные результаты относятся к исследованию модельно-прогнозирующего подхода к управлению движением манипулятора и учитываются при рассмотрении существующих способов построения нелинейных систем управления.

Дальнейшее изложение связывает три уровня описания: параметризацию движения плоским выходом; представление динамики на конфигурационном пространстве с инерционной метрикой; подавление остаточных воздействий с использованием энергии фильтрованной ошибки. Связь является конструктивной: на каждом уровне получаются формулы, непосредственно пригодные для реализации регулятора.

Рассматривается последовательный манипулятор с n независимыми обобщенными координатами q и n независимыми управляющими воздействиями. Звенья считаются жесткими, приводы моментными; упругость передач и динамика электрического контура в основной модели не учитываются. Конфигурации принадлежат многообразию Q. Для вращательных сочленений работа ведется в локальной координатной карте либо с непрерывно развернутыми углами, чтобы разность углов не имела искусственных скачков на границе периода.

$$\mathrm{M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q,\dot{q}) = u + d(t)}, \tag{4.1}$$

где M - симметричная матрица инерции; C - матрица, произведение которой на скорость дает кориолисовы и центробежные силы; G - градиент потенциальной энергии; F - трение; u - обобщенные силы, сопряженные выбранным координатам; d - внешнее обобщенное воздействие.

Все слагаемые, не содержащие ускорений, удобно объединить:

$$h(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q,\dot{q}). \tag{4.2}$$

Ошибку слежения за заданной траекторией $q_d(t)$ определим как

$$e = q_d - q, \qquad \dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}. \tag{4.3}$$

Цель управления — обеспечить стремление ошибки к нулю в идеализированном случае разрывного управления и гарантировать её ограниченность заданной малой величиной при непрерывной реализации регулятора.

В модели раздела 2 углы φ_1 и φ_2 отсчитываются от неподвижной горизонтальной оси, т. е. являются абсолютными углами звеньев, тогда как координаты сочленений α_1, α_2 двухзвенного манипулятора связаны с ними линейным преобразованием (второй угол сочленения относительный):

$$\varphi = A\alpha, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_2 = \varphi_2 - \varphi_1. \tag{4.4}$$

Поскольку матрица A обратима, полностью приводная система управляема в обеих системах координат, однако моменты при переходе между ними должны пересчитываться: правая часть уравнения в абсолютных углах не совпадает с вектором моментов приводов [81]. При положительных массах и длинах звеньев главные миноры матрицы инерции положительны, и по критерию Сильвестра она положительно определена в любой конфигурации; выпрямление звеньев не создаёт динамической сингулярности, в отличие от кинематической сингулярности отображения в декартовы координаты рабочего органа.

4.2 Влияние неопределенностей и возмущений на динамику ошибки

В области управления роботами-манипуляторами линеаризация обратной связью представляет собой важную нелинейную методологию синтеза управления [82, 83]. Ее основная идея заключается в преобразовании нелинейной системы в полностью или частично линейную систему, что позволяет применять хорошо разработанные методы линейного управления.

Линеаризация обратной связью доказала свою эффективность при решении различных практических задач нелинейного управления. Она особенно применима к важным классам нелинейных систем, известным как системы, линеаризуемые по входу–состоянию, или системы с минимальной фазой, при условии, что доступны измерения полного вектора состояния [84].

Применительно к рассматриваемому многозвенному роботу-манипулятору, состояние которого определяется обобщёнными координатами и скоростями сочленений, линеаризация обратной связью осуществляется путём компенсации нелинейных составляющих динамики. При этом управляющее воздействие формируется на основе математической модели манипулятора и вспомогательного управляющего сигнала, включающего заданное ускорение и пропорционально-дифференциальную коррекцию ошибки траекторного слежения. Соответствующий закон управления имеет вид (4.5):

$$u = M(q)a + h(q,\dot{q}), \qquad a = \ddot{q}_d + K_D\dot{e} + K_P e, \tag{4.5}$$

где K_P, K_D — симметричные положительно определённые матрицы размера $n \times n$. При точной модели и отсутствии возмущения подстановка (4.5) в (4.1) даёт $\ddot{q} = a$, и ошибка удовлетворяет линейному уравнению (4.6):

$$\ddot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = 0. \tag{4.6}$$

Структура такого регулятора показана на рисунке 4.1. Вместе с тем сама по себе линеаризация обратной связью не гарантирует робастности: её эффективность определяется точностью модели [85].

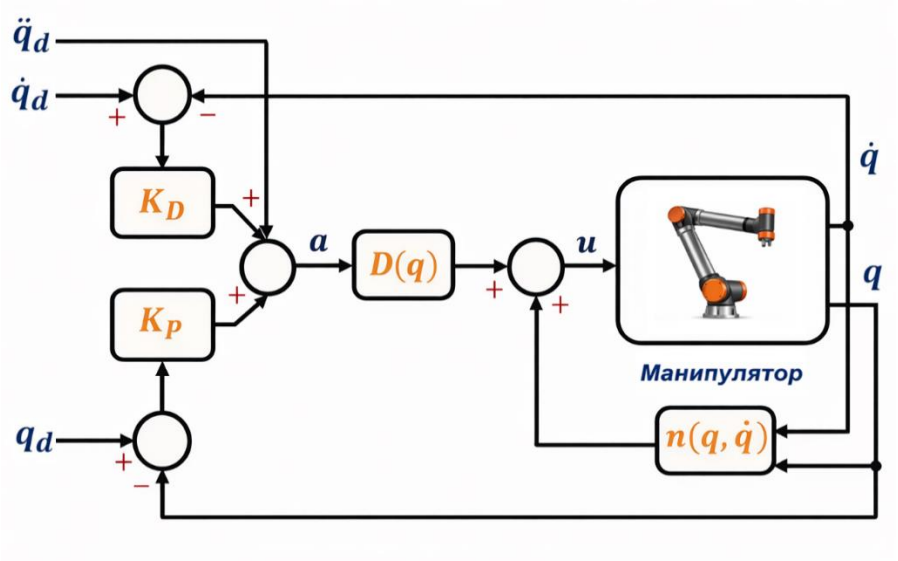


Рисунок 4.1 — Блок-схема управления на основе линеаризации обратной связью.

При несовершенной компенсации регулятор использует не истинные, а вычислительные (оценочные) значения матрицы инерции и вектора h:

$$u = \widehat{M}(q)a + \hat{h}(q,\dot{q}). \tag{4.7}$$

Ошибки оценивания обусловлены как неточностью параметров, так и сознательным упрощением вычисления обратной динамики [86-89]. В частности, при $\widehat{M} = \bar{M}$, где $\bar{M}$ — диагональная матрица средних моментов инерции по осям сочленений, и $\hat{h} = 0$ получается децентрализованная схема, в которой a может формироваться обычным ПИД-регулятором по ошибке.

$$\widetilde{M} = \widehat{M} - M, \qquad \tilde{h} = \hat{h} - h \tag{4.8}$$

Подставляя (4.7) в (4.1) и учитывая обратимость матрицы M, находим

$$\ddot{q} = a - \eta, \qquad \eta = \left(I - M^{-1}\widehat{M}\right)a - M^{-1}\left(\tilde{h} + d\right). \tag{4.9}$$

Тогда при выборе a по формуле (4.5) ошибка удовлетворяет уравнению

$$\ddot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = \eta. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.10) остаётся нелинейным и взаимосвязанным, поскольку η зависит от q, $\dot{q}$ и a. В терминах раздела 3 эти два слагаемых соответствуют рассогласованию метрик и символов Кристоффеля истинной и модельной поверхностей [90]. Регулятор (4.5) сам по себе не обеспечивает сходимости ошибки к нулю: при постоянном η установившаяся ошибка равна $K_P^{-1}\eta$.

4.3 Синтез нелинейного робастного закона траекторного управления

Воспользуемся прямым методом Ляпунова для синтеза внешнего контура обратной связи по ошибке, робастного по отношению к η. Дополним вспомогательное управление корректирующей составляющей w:

$$a = \ddot{q}_d + K_D\dot{e} + K_P e + w, \tag{4.11}$$

где w будет выбрано на основе информации о границах неопределённости. Введём вектор состояния ошибки $\xi = [e^T,\ \dot{e}^T]^T$. Из (4.9) и (4.11) следует, что его динамика описывается уравнением

$$\dot{\xi} = \widetilde{H}\xi + B(\eta - w), \qquad \widetilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_P & -K_D \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Матрица $\widetilde{H}$ гурвицева, поэтому для любой симметричной положительно определённой матрицы P уравнение Ляпунова (4.13).

$$\widetilde{H}^T Q + Q\widetilde{H} = -P \tag{4.13}$$

имеет единственное симметричное положительно определённое решение Q. Выберем функцию Ляпунова $V(\xi) = \xi^T Q\xi$. Её производная вдоль решений (4.12) равна (4.14):

$$\dot{V} = -\xi^T P\xi + 2z^T(\eta - w), \qquad z = B^T Q\xi. \tag{4.14}$$

Первое слагаемое отрицательно определено, поэтому для убывания V достаточно выбрать w так, чтобы второе слагаемое было неположительным. Для этого введём предположения о границах неопределённости (4.15) [91]:

$$\|I - M^{-1}(q)\widehat{M}(q)\| \le \alpha < 1, \qquad \|\tilde{h}(q,\dot{q}) + d(t)\| \le \Phi < \infty, \qquad \|\ddot{q}_d(t)\| \le \varphi_M < \infty. \tag{4.15}$$

Матрица M положительно определена и ограничена, поэтому $\| M^{-1}(q) \| \le D_M$, а собственные значения M^{-1} лежат в отрезке $[D_m,\ D_M]$, $D_m > 0$. Первое условие (4.15) всегда можно выполнить (4.1+):

$$\widehat{M} = \frac{2}{D_M + D_m} I \qquad \text{имеем} \qquad \|I - M^{-1}\widehat{M}\| \le \frac{D_M - D_m}{D_M + D_m} = \alpha < 1, \tag{4.16}$$

причём чем точнее оценка матрицы инерции, тем меньше α. Выберем корректирующую составляющую в виде (4.17):

$$w = \rho \frac{z}{\| z \|}, \qquad \rho > 0. \tag{4.17}$$

Тогда:

$$z^T(\eta - w) \leq \| z \| \| \eta \| - \rho \| z \| = \| z \| (\| \eta \| - \rho), \tag{4.18}$$

и при $\rho > \| \eta \|$ производная $\dot{V}$ отрицательна вдоль всех траекторий системы ошибки. С учётом (4.9), (4.11), (4.15) и равенства $\| w \| = \rho$ норма неопределённости оценивается (4.19):

$$\| \eta \| \leq \alpha\varphi_M + \alpha \| K \| \| \xi \| + \alpha\rho + D_M\Phi, \qquad K = [K_P \; K_D]. \tag{4.19}$$

Следовательно, условие $\rho > \| \eta \|$ выполняется, при условии (4.20):

$$\rho > \frac{1}{1-\alpha}(\alpha\varphi_M + \alpha \| K \| \| \xi \| + D_M\Phi). \tag{4.20}$$

Соотношение (4.20) связывает требуемый уровень корректирующего воздействия с точностью модели (α, Φ), интенсивностью задания (φ_M) и инерционными свойствами манипулятора (D_M). Оно является достаточным и, как правило, консервативным.

Для одинаковых каналов $K_P = k_p I$, $K_D = k_d I$ и матрицы $P = \mathrm{diag}(p_1 I,\ p_2 I)$ решение уравнения (4.13) имеет блочный вид $Q = \begin{bmatrix} q_1 I & q_2 I \\ q_2 I & q_4 I \end{bmatrix}$, где

$$q_2 = \frac{p_1}{2k_p}, \qquad q_4 = \frac{1}{k_d}\left(q_2 + \frac{p_2}{2}\right), \qquad q_1 = k_p q_4 + k_d q_2. \tag{4.21}$$

В частном случае $p_1 = p_2 = \bar{p}$ отсюда получаем $q_1 = \bar{p}\left(k_p + k_p^2 + k_d^2\right)/\left(2k_p k_d\right)$, $q_2 = \bar{p}/\left(2k_p\right)$, $q_4 = \bar{p}\left(k_p + 1\right)/\left(2k_p k_d\right)$. Сигнал z при этом равен:

$$z = q_2 e + q_4 \dot{e}, \tag{4.22}$$

т. е. является линейной комбинацией ошибок по положению и скорости, а отношение q_4/q_2 задаёт наклон поверхности $z = 0$. Подставляя (4.17) и (4.22) в (4.11), получаем

$$a = \ddot{q}_d + \left(k_p + \frac{\rho q_2}{\| z \|}\right) e + \left(k_d + \frac{\rho q_4}{\| z \|}\right) \dot{e}. \tag{4.23}$$

Согласно (4.23), при уменьшении $\| z \|$действие робастной составляющей соответствует автоматическому увеличению пропорционального и дифференциального коэффициентов, что обеспечивает компенсацию неопределённости. Закон (4.17) переводит ошибку на поверхность скольжения $z = 0$, на которой управление переключается с бесконечно высокой частотой (дребезг, chattering), что практически нереализуемо. Поэтому используется непрерывная модификация с пограничным слоем ширины ε:

$$w = \begin{cases} \rho \dfrac{z}{\| z \|}, & \| z \| \geq \varepsilon, \\ \rho \dfrac{z}{\varepsilon}, & \| z \| < \varepsilon. \end{cases} \tag{4.24}$$

Вне слоя оценка (4.18) сохраняется, а внутри слоя $z^T(\eta - w) \leq \rho \| z \| - \rho \| z \|^2/\varepsilon \leq \rho\varepsilon/4$. Поэтому $\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(P) \| \xi \|^2 + \rho\varepsilon/2$, и ошибка за конечное время входит в окрестность нуля и остаётся в ней:

$$\| \xi \| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}} \sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{2\lambda_{\min}(P)}}. \tag{4.25}$$

Уменьшение ε сужает окрестность, но повышает эквивалентное усиление внутри слоя, что может вызывать дребезг при цифровой реализации. Поэтому ε выбирают с учётом компромисса между точностью и гладкостью управления. Структурная схема робастного управления приведена на рисунке 4.2.

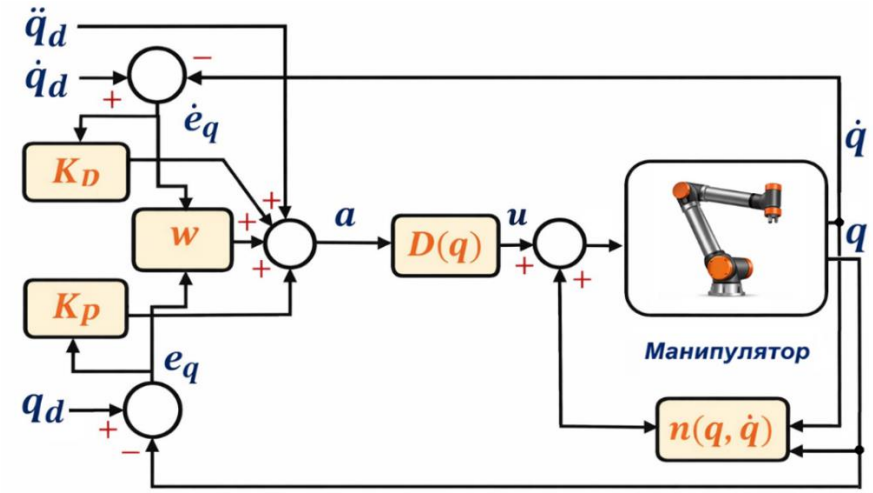


Рисунок 4.2 — Блок-схема робастного управления на основе линеаризации обратной связью.

Предложенная структура сочетает линеаризацию динамики манипулятора обратной связью с робастной компенсацией неопределённостей модели и внешних возмущений. Непрерывный закон (4.24) исключает высокочастотное переключение и обеспечивает ограниченность ошибки слежения при выполнении условий (4.15) и (4.20).

4.4 Частотный анализ чувствительности замкнутой системы к возмущениям

В MATLAB/Simulink создана модель эквивалентной линейной системы СТС для оценки влияния гармонического возмущения на ошибку слежения (рисунок 4.3). Блоки задания формируют требуемые положение, скорость и ускорение. ПД-коррекция ошибок с коэффициентами K_P и K_D суммируется с заданным ускорением и возмущением. Два последовательных интегратора формируют скорость и положение. Сигналы ошибки и возмущения передаются в рабочую область MATLAB для расчёта амплитуд и фазовых сдвигов.

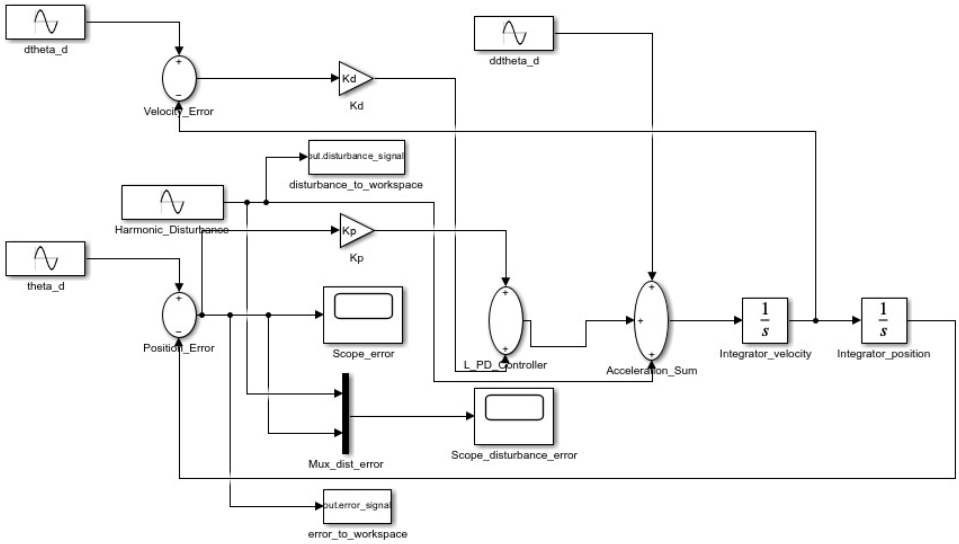


Рисунок 4.3 — Структурная схема эквивалентной линейной системы траекторного управления с гармоническим возмущением

При точной компенсации нелинейной динамики влияние возмущения $n(t)$, во вспомогательном ускорении на ошибку слежения каждого сочленения описывается передаточной функцией (4.26):

$$W_n(s) = \frac{1}{s^2 + k_d s + k_p} = \frac{1}{(s+10)^2} \qquad (k_p = 100,\ k_d = 20). \quad (4.26)$$

Экспериментальную частотную характеристику определяли по установившемуся гармоническому отклику системы. Модуль рассчитывали как отношение амплитуды ошибки к амплитуде возмущения, а фазу как разность фаз этих сигналов (4.27).

$$|W_n(j\omega)| = \frac{A_e(\omega)}{A_n(\omega)}, \qquad \varphi_n(\omega) = \varphi_e(\omega) - \varphi_{n,\,\text{вх}}(\omega). \qquad (4.27)$$

Коэффициент передачи возмущения в ошибку монотонно убывает с частотой без резонансного пика (рисунок 4.4). При равной амплитуде высокочастотные возмущения вызывают меньшую ошибку, чем низкочастотные. Экспериментальные точки совпадают с теоретической кривой.

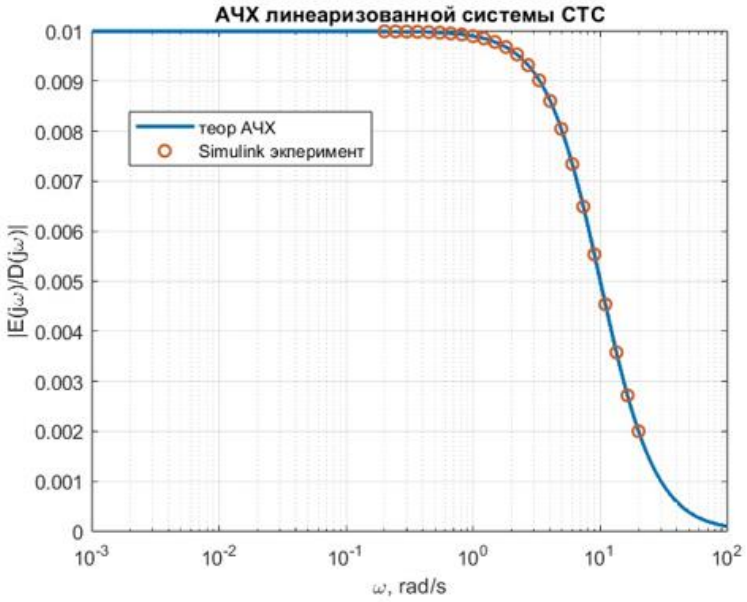


Рисунок 4.4 — Сравнение теоретической и экспериментальной амплитудно-частотных характеристик линеаризованной системы СТС

Для проверки полученных свойств разработана имитационная модель замкнутой системы двухзвенного манипулятора (рисунок 4.7). Она включает генератор задания, СТС-регулятор, вычисляющий моменты по вспомогательному ускорению, блок полной нелинейной динамики и параллельные теоретические звенья (4.26) для каждого сочленения. Частотные характеристики определяли при нулевом задании и нулевых начальных условиях, поочерёдно подавая гармоническое воздействие $v = \ddot{q}_d + K_D\dot{e} + K_P e + n(t)$ в канал каждого сочленения.

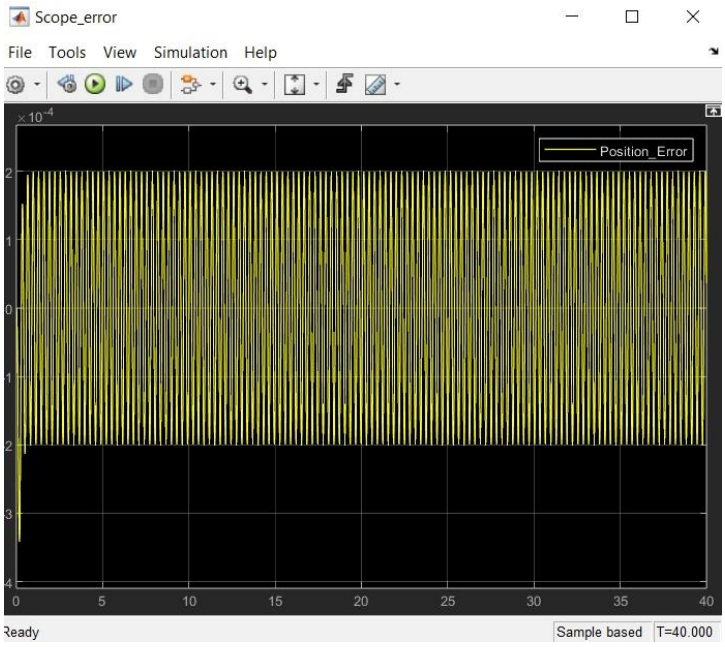


Рисунок 4.5 — Временная зависимость ошибки положения при гармоническом возмущении

В течение 40 с моделирования ошибка остаётся малой и ограниченной, колеблясь около нуля без заметного роста амплитуды. Сохранение колебаний обусловлено непрерывным действием возмущения. Отношение амплитуды установившейся ошибки к амплитуде возмущения используется для построения экспериментальной АЧХ эквивалентной линейной системы СТС.

Сигналы Harmonic_Disturbance и Position_Error объединяются блоком Mux_dist_error и отображаются в Scope_disturbance_error для сопоставления возмущения и ошибки слежения (рисунок 4.6).

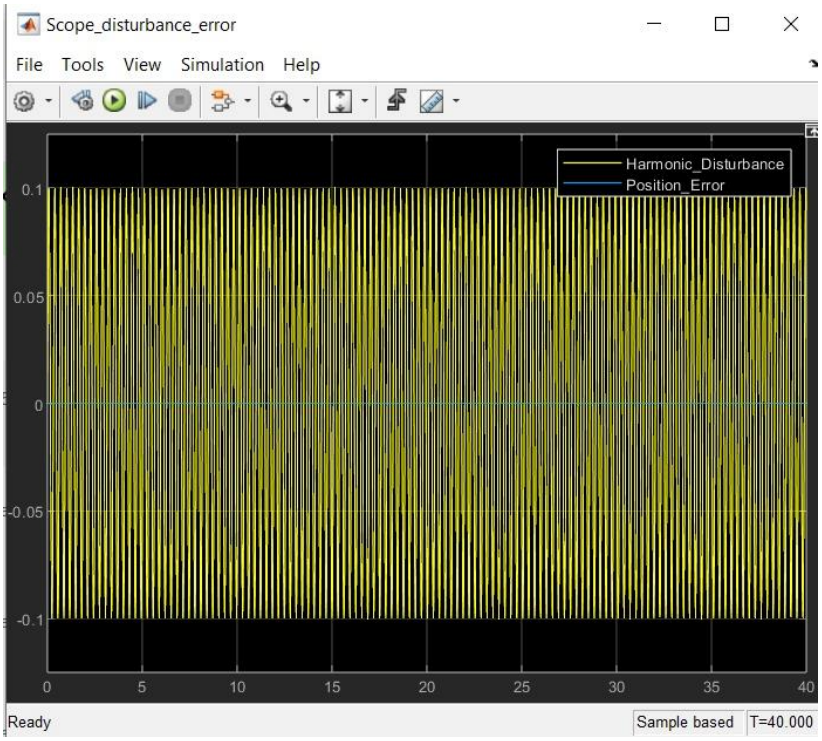


Рисунок 4.6 — Гармоническое возмущение и ошибка положения эквивалентной линейной системы СТС

При выбранных параметрах и условиях моделирования ошибка положения в эквивалентной линейной системе СТС остаётся малой и ограниченной при непрерывном гармоническом возмущении. В масштабе графика она практически совпадает с нулевой линией (рисунок 4.6).

Модель замкнутой системы управления двухзвенным манипулятором на основе СТС, разработанная в MATLAB/Simulink (рисунок 4.7), позволяет исследовать два входных канала: задание траектории и аддитивное возмущение, вводимое в виртуальное управляющее ускорение.

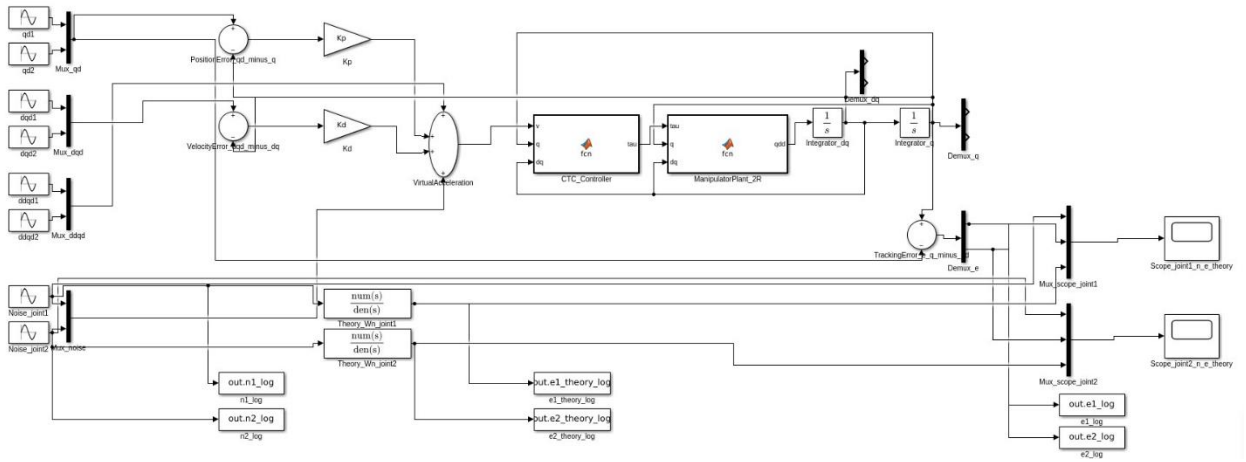


Рисунок 4.7 — Имитационная модель замкнутой системы управления двухзвенным роботом-манипулятором на основе СТС с каналом аддитивного возмущения

На низких частотах АЧХ (рисунок 4.8) близка к −40 дБ (коэффициент передачи 0,01), около 10 рад/с — к −46 дБ, при 100 рад/с — к −80 дБ. Высокочастотный наклон приближается к −40 дБ на декаду.

Результаты обоих сочленений практически совпадают с расчётной кривой: относительное расхождение модулей во всём диапазоне не превышает 0,034 %. Различие фаз ограничивается сотыми долями градуса. Это подтверждает корректность реализации канала возмущения при точной компенсации нелинейной динамики.

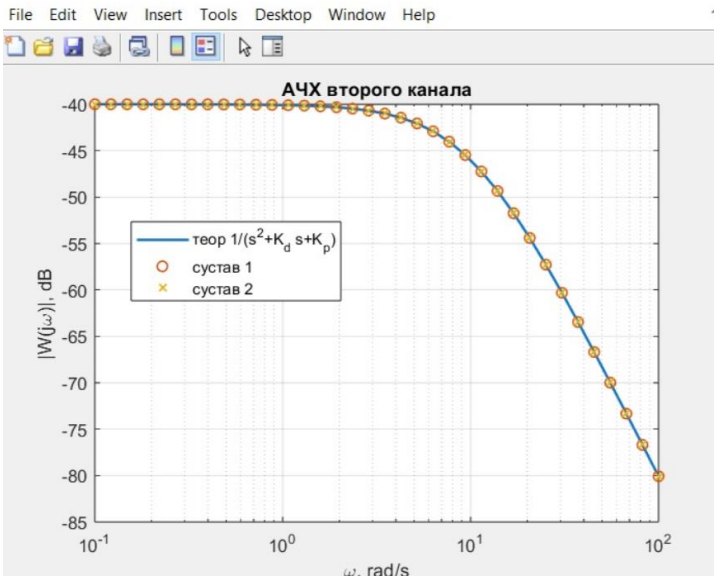


Рисунок 4.8 — Амплитудно-частотная характеристика канала аддитивного возмущения

Частотный анализ позволяет наглядно сравнить метод вычисляемых моментов с робастным законом. Внутри пограничного слоя закон (4.24) линеен, $w = \rho z/\varepsilon$, и согласно (4.22) эквивалентен увеличению коэффициентов ПД-регулятора на $\rho q_2/\varepsilon$ и $\rho q_4/\varepsilon$. Соответствующая передаточная функция канала возмущения

$$W_r(s) = \frac{1}{s^2 + (k_d + \rho q_4/\varepsilon)s + k_p + \rho q_2/\varepsilon}. \qquad (4.28)$$

При параметрах, использованных в подразделе 4.5 ($\rho = 100$ рад/с^2, $\varepsilon = 10^{-4}$, $q_2 = 0{,}005$, $q_4 = 0{,}0005$), эквивалентные коэффициенты составляют 5100 и 520, и коэффициент передачи низкочастотного возмущения уменьшается с −40 до −74 дБ, т. е. примерно в 50 раз (рисунок 4.9). При этом робастный закон не требует знания возмущения и не увеличивает коэффициенты при больших ошибках: вне пограничного слоя корректирующее воздействие ограничено величиной ρ.

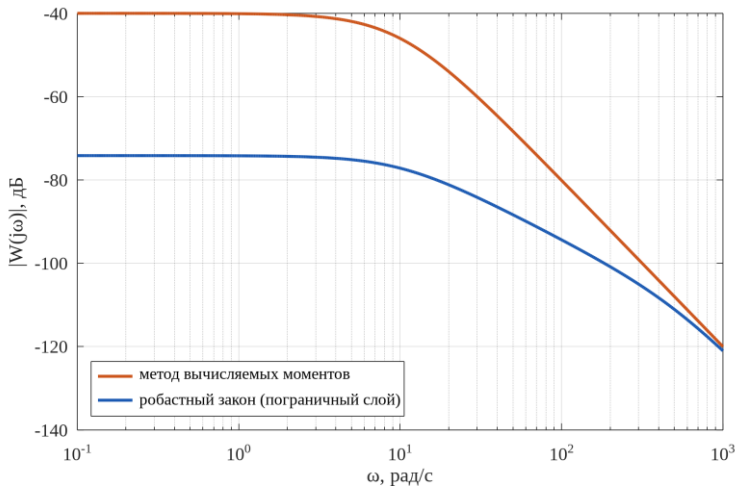
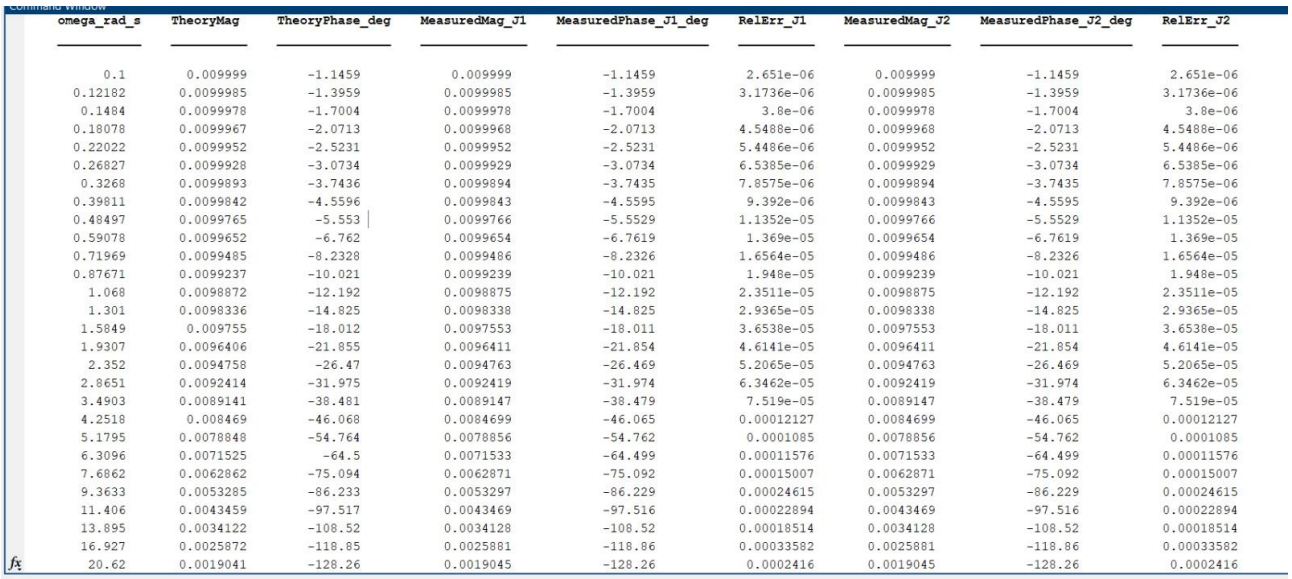


Рисунок 4.9 – Амплитудно-частотные характеристики канала возмущения при управлении методом вычисляемых моментов и робастным законом в пограничном слое

После завершения расчета в командном окне MATLAB выводится таблица. Каждая строка соответствует одной частоте и содержит расчетные и измеренные значения модуля и фазы, а также их относительное расхождение. Результаты сопоставления расчетной и измеренной частотных характеристик:



omega_rad_s	TheoryMag	TheoryPhase_deg	MeasuredMag_J1	MeasuredPhase_J1_deg	RelErr_J1	MeasuredMag_J2	MeasuredPhase_J2_deg	RelErr_J2
0.1	0.009999	-1.1459	0.009999	-1.1459	2.651e-06	0.009999	-1.1459	2.651e-06
0.12182	0.0099985	-1.3959	0.0099985	-1.3959	3.1736e-06	0.0099985	-1.3959	3.1736e-06
0.1484	0.0099978	-1.7004	0.0099978	-1.7004	3.8e-06	0.0099978	-1.7004	3.8e-06
0.18078	0.0099967	-2.0713	0.0099968	-2.0713	4.5488e-06	0.0099968	-2.0713	4.5488e-06
0.22022	0.0099952	-2.5231	0.0099952	-2.5231	5.4486e-06	0.0099952	-2.5231	5.4486e-06
0.26827	0.0099928	-3.0734	0.0099929	-3.0734	6.5385e-06	0.0099929	-3.0734	6.5385e-06
0.3268	0.0099893	-3.7436	0.0099894	-3.7435	7.8575e-06	0.0099894	-3.7435	7.8575e-06
0.39811	0.0099842	-4.5596	0.0099843	-4.5595	9.392e-06	0.0099843	-4.5595	9.392e-06
0.48497	0.0099765	-5.553	0.0099766	-5.5529	1.1352e-05	0.0099766	-5.5529	1.1352e-05
0.59078	0.0099652	-6.762	0.0099654	-6.7619	1.369e-05	0.0099654	-6.7619	1.369e-05
0.71969	0.0099485	-8.2328	0.0099486	-8.2326	1.6564e-05	0.0099486	-8.2326	1.6564e-05
0.87671	0.0099237	-10.021	0.0099239	-10.021	1.948e-05	0.0099239	-10.021	1.948e-05
1.068	0.0098872	-12.192	0.0098875	-12.192	2.3511e-05	0.0098875	-12.192	2.3511e-05
1.301	0.0098336	-14.825	0.0098338	-14.825	2.9365e-05	0.0098338	-14.825	2.9365e-05
1.5849	0.009755	-18.012	0.0097553	-18.011	3.6538e-05	0.0097553	-18.011	3.6538e-05
1.9307	0.0096406	-21.855	0.0096411	-21.854	4.6141e-05	0.0096411	-21.854	4.6141e-05
2.352	0.0094758	-26.47	0.0094763	-26.469	5.2065e-05	0.0094763	-26.469	5.2065e-05
2.8651	0.0092414	-31.975	0.0092419	-31.974	6.3462e-05	0.0092419	-31.974	6.3462e-05
3.4903	0.0089141	-38.481	0.0089147	-38.479	7.519e-05	0.0089147	-38.479	7.519e-05
4.2518	0.008469	-46.068	0.0084699	-46.065	0.00012127	0.0084699	-46.065	0.00012127
5.1795	0.0078848	-54.764	0.0078856	-54.762	0.0001085	0.0078856	-54.762	0.0001085
6.3096	0.0071525	-64.5	0.0071533	-64.499	0.00011576	0.0071533	-64.499	0.00011576
7.6862	0.0062862	-75.094	0.0062871	-75.092	0.00015007	0.0062871	-75.092	0.00015007
9.3633	0.0053285	-86.233	0.0053297	-86.229	0.00024615	0.0053297	-86.229	0.00024615
11.406	0.0043459	-97.517	0.0043469	-97.516	0.00022894	0.0043469	-97.516	0.00022894
13.895	0.0034122	-108.52	0.0034128	-108.52	0.00018514	0.0034128	-108.52	0.00018514
16.927	0.0025872	-118.85	0.0025881	-118.86	0.00033582	0.0025881	-118.86	0.00033582
20.62	0.0019041	-128.26	0.0019045	-128.26	0.0002416	0.0019045	-128.26	0.0002416

Рисунок 4.10 —Вывод результатов командного окна

При частоте 0,1 рад/с расчетный и измеренный модули после округления равны 0,009999, а фазы приблизительно −1,1459°. Относительное расхождение составляет $2{,}651 \cdot 10^{-6}$, то есть около 0,000265 %.

При частоте 9,3633 рад/с расчетный модуль равен 0,0053285, измеренный — 0,0053297. Расчетная и измеренная фазы составляют соответственно −86,233° и −86,229°. В показанной части таблицы относительное расхождение не превышает приблизительно 0,034 %.

Таким образом, график и таблица демонстрируют согласованность численной модели с аналитическим результатом по модулю и фазе. Это подтверждает корректность реализации второго входного канала в условиях точного соответствия моделей регулятора и объекта.

4.5 Компьютерное исследование робастного закона при параметрических неопределённостях и внешних возмущениях

На рисунке 4.11 представлена модель траекторного управления в среде MATLAB/Simulink, описывающая динамику одного координатного канала после точной компенсации нелинейных составляющих методом вычисляемых моментов. Объект управления представлен двумя последовательно соединенными интеграторами: первый преобразует ускорение в угловую скорость, второй преобразует угловую скорость в угловое положение.

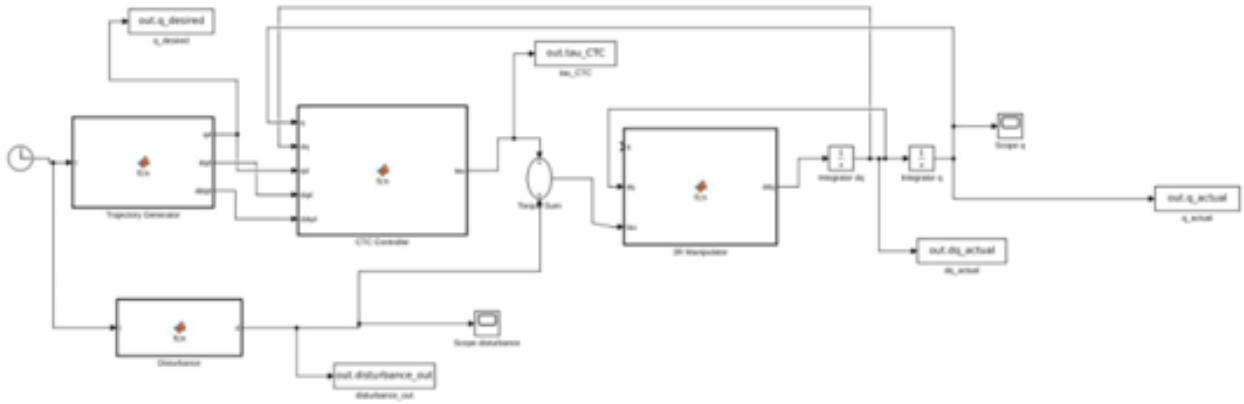


Рисунок 4.11 — Нелинейная модель двухзвенного робота-манипулятора

Таким образом, из рисунка 4.11 генератор формирует заданные координаты, скорости и ускорения. Контроллер CTC вычисляет моменты на основании задания и обратной связи. Возмущение суммируется с моментами до блока прямой динамики 2R Manipulator. Выход ускорений интегрируется для получения скорости и положения; текущие состояния возвращаются в регулятор. Представленная схема используется для проверки номинальной динамики ошибки и оценки ее отклика на гармоническое воздействие.

На рисунке 4.12 q_{1d} и фактической координаты q_1 представлены временные зависимости заданной координаты первого сочленения при управлении методом вычисляемых моментов. Заданная траектория показана синей пунктирной линией, фактическая сплошной оранжевой линией. Вертикальные штриховые линии отмечают моменты включения и отключения внешнего возмущения второго сочленения (t=4) с и (t=5) с соответственно.

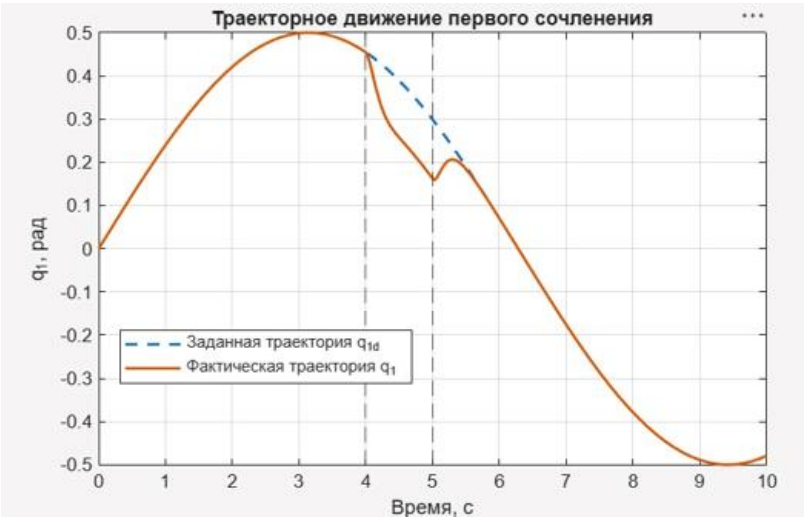


Рисунок 4.12 — Заданная и фактическая траектории первого сочленения манипулятора при внешнем возмущении

До включения возмущения фактическая траектория визуально совпадает с заданной. После приложения внешнего момента возникает отклонение:

фактическая координата первого сочленения уменьшается быстрее, чем предусмотрено заданием.

Возникновение ошибки первого сочленения при воздействии на второе иллюстрирует динамическую связанность звеньев манипулятора. Внешний момент изменяет движение всей механической системы, вследствие чего отклонение возникает и в координате, к которой возмущение непосредственно не прикладывается.

После отключения воздействия наблюдается восстановительный переходный процесс. Фактическая траектория приближается к заданной, и примерно к (t=6) с различие между ними на выбранном масштабе становится практически неразличимым. Таким образом, в представленном эксперименте базовый регулятор СТС восстанавливает слежение после снятия нагрузки, однако во время ее действия допускает заметную ошибку.

На рисунке 4.13 представлены временные зависимости заданной координаты q_{2d} и фактической координаты $q_{2.}$

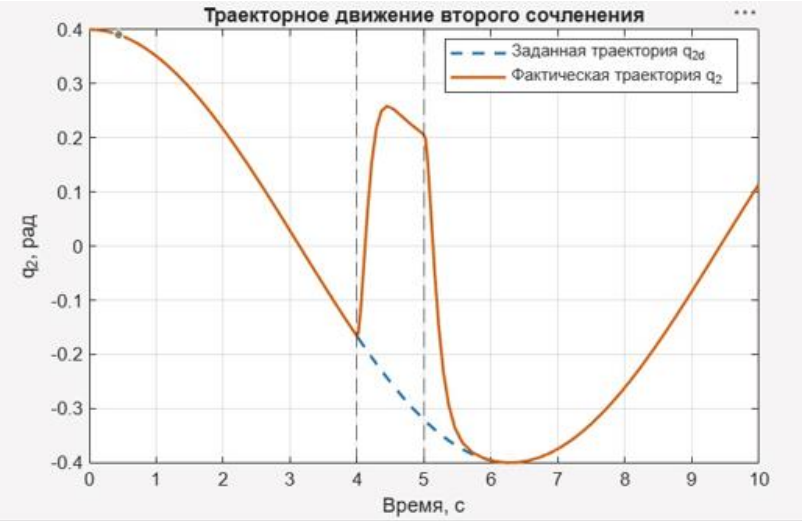


Рисунок 4.13 — Заданная и фактическая траектории второго сочленения манипулятора при внешнем возмущении

На рисунке 4.14 представлены ошибки слежения первого и второго сочленений манипулятора при управлении методом вычисляемых моментов.

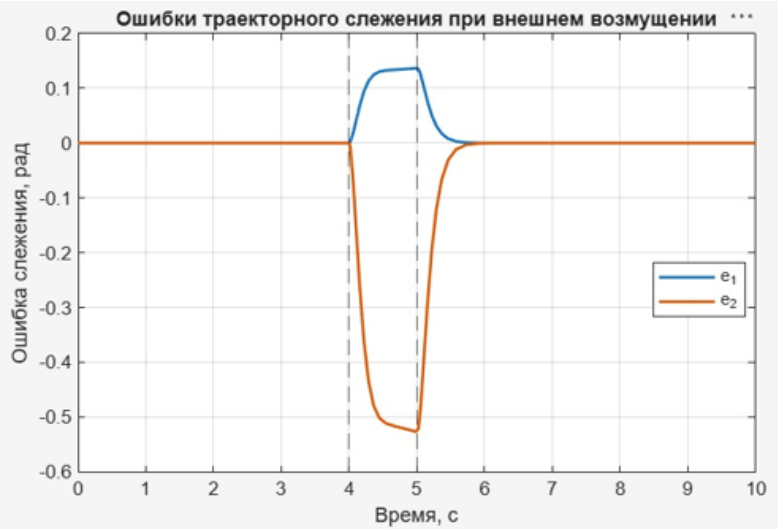


Рисунок 4.14 — Ошибки траекторного слежения при внешнем возмущении

Возникновение ошибки первого сочленения при воздействии на второе отражает динамическую взаимосвязь звеньев манипулятора. В данном эксперименте наибольшее отклонение наблюдается в непосредственно возмущаемом сочленении.

После снятия внешнего момента обе ошибки быстро уменьшаются и примерно к (t=6) с становятся визуально близкими к нулю.

На рисунке 4.15 показаны заданная и фактическая траектории двухзвенного манипулятора в конфигурационном пространстве. Каждая точка плоскости соответствует определенному сочетанию угловых положений сочленений.

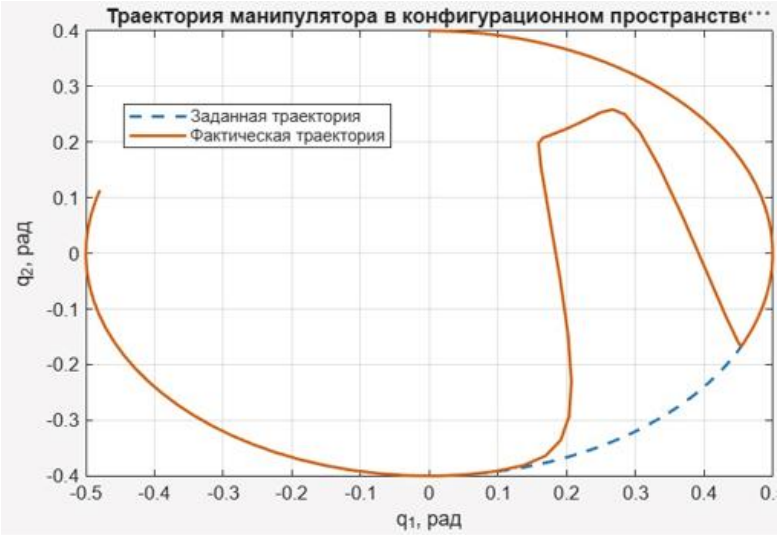


Рисунок 4.15 — Заданная и фактическая траектории манипулятора в конфигурационном пространстве

Таким образом, из рисунка 4.15 видно, что заданное движение проходит по эллипсу. За конечный интервал моделирования изображается соответствующая часть этой кривой.

На рисунке 4.16 показано внешнее воздействие второго канала: прямоугольный импульс амплитудой 3 Н*м на интервале от 4 до 5 с. Продолжительность серии составляет 10 с.

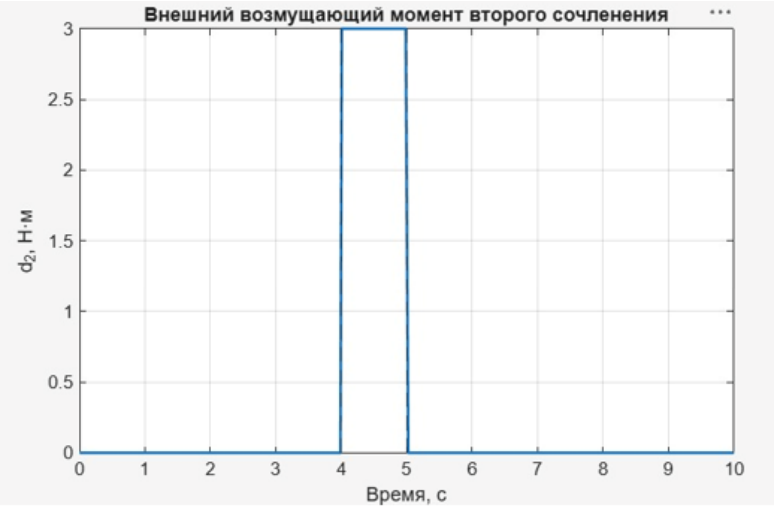


Рисунок 4.16 — Внешний возмущающий момент второго сочленения манипулятора

Во втором канале задан прямоугольный импульс внешнего момента амплитудой 3 Н·м, действующий с 4 до 5 с (рисунок 4.16). Длительность серии 10 с.

Тестовый импульс позволяет оценить максимальные ошибки координат, время восстановления слежения после снятия нагрузки и изменение управляющих моментов. Из-за динамической связи звеньев возмущение второго сочленения может вызвать отклонения обеих обобщённых координат.

График задаёт условия компьютерного эксперимента. Эффективность компенсации оценивают по графикам ошибок, траекторий и управляющих моментов.

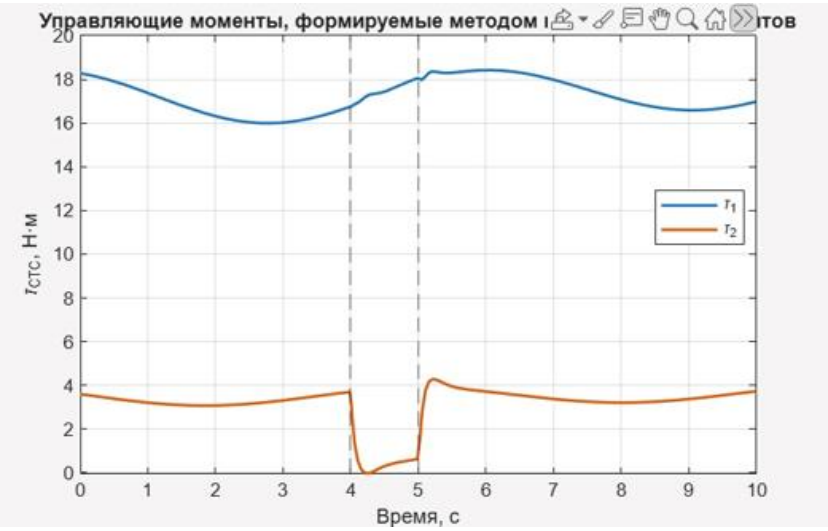


Рисунок 4.17 — Управляющие моменты, формируемые методом вычисляемых моментов при внешнем возмущении

До возмущения моменты изменяются плавно: примерно 16–18 Н·м в первом сочленении и 3–4 Н·м во втором. Различие связано с динамическими нагрузками и параметрами модели.

При положительном внешнем моменте во втором сочленении регулятор резко снижает управляющий момент, реагируя на превышение фактической координаты над заданной. После снятия нагрузки момент быстро возрастает, затем возвращается к плавному изменению по мере восстановления слежения. Изменения момента первого сочленения при включении и отключении возмущения согласуются с динамической связью звеньев.

Робастный закон (4.24) исследовали в MATLAB на модели двухзвенного манипулятора с распределёнными массами звеньев, гравитацией, трением в сочленениях и внешним возмущающим моментом. В модели регулятора массы и моменты инерции были занижены, а трение не учитывалось, что нарушало точную компенсацию динамики классическим СТС. Параметры объекта и модели регулятора приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Параметры манипулятора и модели регулятора

Параметр	Объект	Модель регулятора
Массы звеньев m_1, m_2, кг	1,0; 1,0	0,8; 0,7
Длина первого звена l_1, м	1,0	1,0
Расстояния до центров масс l_{c1}, l_{c2}, м	0,5; 0,4	0,5; 0,4
Моменты инерции I_1, I_2, кг·м^2	0,083; 0,053	0,067; 0,037
Вязкое трение, Н·м·с	0,3; 0,2	не учитывается
Сухое трение, Н·м	0,4; 0,3	не учитывается

Заданная траектория и коэффициенты ПД-части совпадают с принятыми в подразделе 2.5: $q_{d1} = 0{,}30\sin(t + 0{,}20)$, $q_{d2} = 0{,}20\sin(1{,}40t - 0{,}40)$, $k_p = 100$,

$k_d = 20$, что соответствует критическому демпфированию номинальной ошибки. Для робастного закона принята матрица $P = \mathrm{diag}(I,\ 0{,}01I)$, при которой по формулам (4.21) $q_2 = 0{,}005$, $q_4 = 0{,}0005$, и поверхность $z = 0$ соответствует затуханию ошибки с постоянной времени 0,1 с. Параметры корректирующей составляющей: $\rho = 100$ рад/с^2, $\varepsilon = 10^{-4}$. Объект интегрировался методом Рунге — Кутты четвёртого порядка с шагом 1 мс; регулятор реализован как цифровой с тем же периодом: моменты вычисляются в начале шага и удерживаются до следующего. Такая реализация позволяет наблюдать эффект дребезга при малой ширине пограничного слоя.

Оценка коэффициента ρ по условию (4.20) для рабочей области манипулятора дала $\alpha = 0{,}37$, $D_M = 20{,}2$ кг$^{-1}$·м$^{-2}$, $\varphi_M = 0{,}49$ рад/с^2, $\Phi = 7{,}25$ Н·м (с учётом трения и внешнего момента 3 Н·м) и $\| K \| = 102$; при $\| \xi \| \leq 0{,}05$ отсюда следует $\rho > 236$ рад/с^2. Как будет показано ниже, условие (4.20) является достаточным с запасом: уже при $\rho = 100$ рад/с^2 ошибка уменьшается более чем на порядок.

Рассмотрены два сценария. В первом на фоне параметрической неопределённости и трения ко второму сочленению на интервале 4–5 с прикладывается прямоугольный импульс внешнего момента амплитудой 3 Н·м — то же воздействие, что и в исследовании метода вычисляемых моментов в среде Simulink. Во втором сценарии в момент 5 с масса второго звена скачком увеличивается на 0,5 кг, что моделирует захват груза, неизвестного регулятору. Начальные условия соответствуют заданной траектории. В обоих сценариях сравниваются метод вычисляемых моментов ($\rho = 0$) и робастный закон при одинаковых коэффициентах ПД-части.

Заданные и фактические траектории сочленений в первом сценарии показаны на рисунке 4.18. При управлении методом вычисляемых моментов фактические координаты заметно отклоняются от заданных уже до приложения внешнего момента — вследствие неточной модели и трения, — а на интервале действия импульса отклонение второго сочленения достигает 0,5 рад. При робастном законе фактические траектории на выбранном масштабе совпадают с заданными на всём интервале, включая интервал действия возмущения.

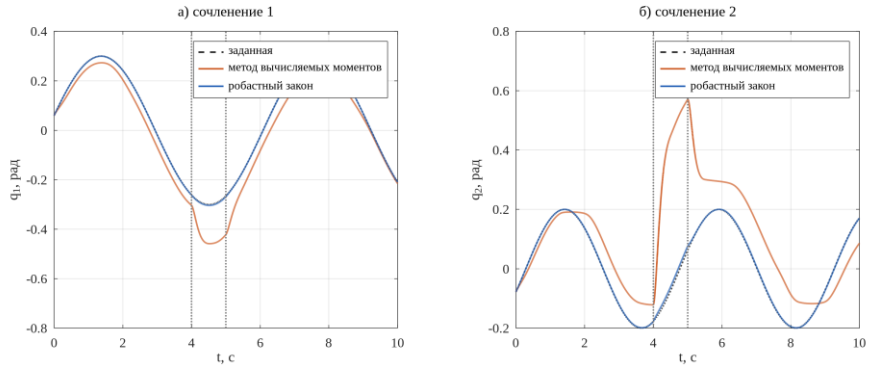


Рисунок 4.18 – Заданные и фактические траектории первого (а) и второго (б) сочленений при параметрической неопределённости, трении и импульсе внешнего момента

Ошибки слежения (рисунок 4.19) характеризуют различие количественно. До приложения импульса наибольшие ошибки метода вычисляемых моментов составляют 0,051 и 0,092 рад, робастного закона — 0,0010 и 0,0019 рад, т. е. примерно в 50 раз меньше. На интервале действия импульса ошибки метода вычисляемых моментов достигают 0,160 и 0,525 рад, а робастного закона — 0,0043 и 0,014 рад (уменьшение в 37 раз).

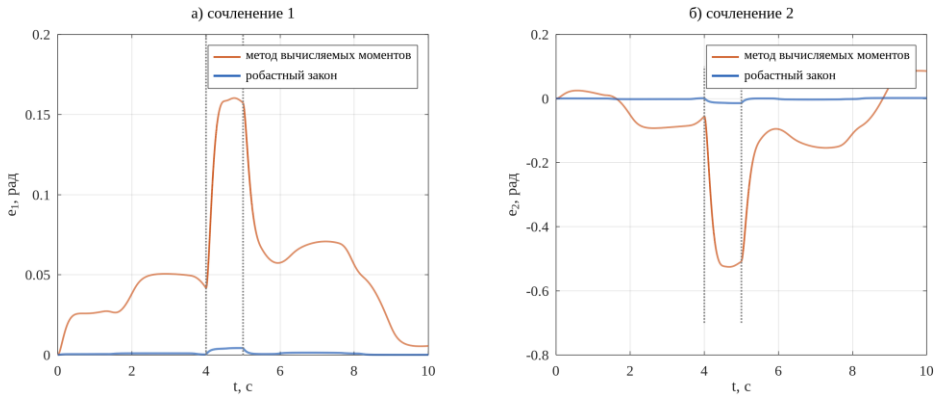


Рисунок 4.19 – Ошибки слежения первого (а) и второго (б) сочленений при параметрической неопределённости, трении и импульсе внешнего момента

Повышение точности при робастном управлении не сопровождается ростом пиковых моментов: 19,2 и 4,4 Н·м против 19,7 и 4,4 Н·м у СТС (рисунок 4.20). При включении внешнего момента 3 Н·м робастный регулятор почти сразу снижает момент второго привода примерно на величину возмущения и восстанавливает его после отключения нагрузки. Классический СТС реагирует по мере нарастания ошибки слежения.

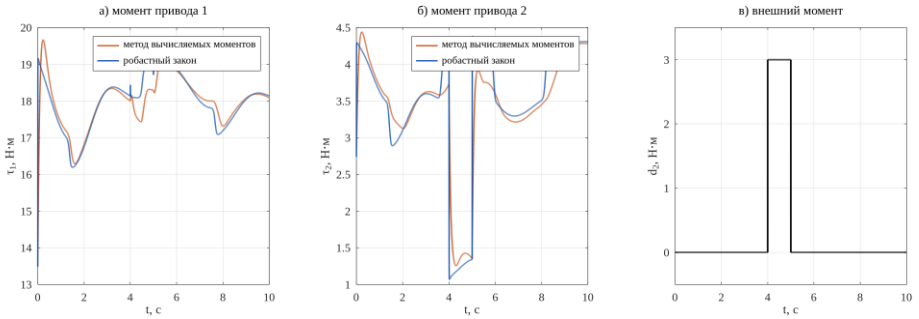


Рисунок 4.20 – Моменты первого (а) и второго (б) приводов и внешний возмущающий момент (в)

Корректирующая составляющая w остаётся близкой к неизвестному воздействию η(рисунок 4.21). Во время импульса её вторая компонента достигает примерно -70 рад/с^2, что соответствует внешнему моменту 3 Н·м, приведённому к ускорению. При робастном управлении норма сигнала z на всём интервале остаётся внутри пограничного слоя $\| z \| < \varepsilon$, а при СТС превышает ε на порядок.

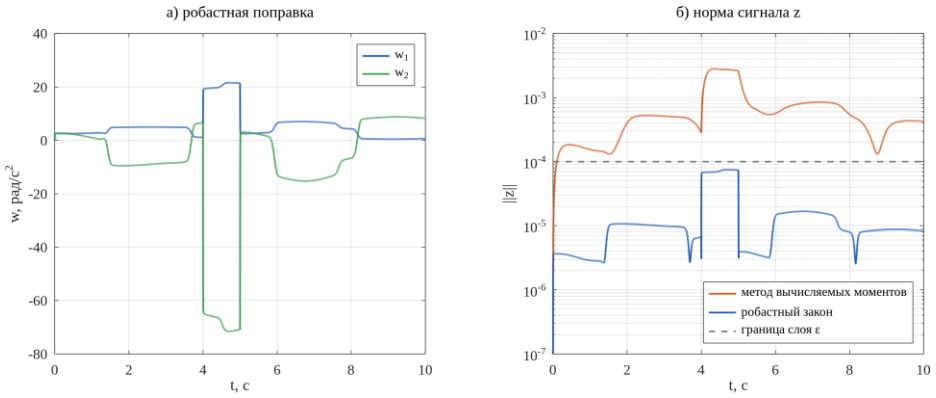


Рисунок 4.21 – Робастная поправка (а) и норма сигнала z в сравнении с шириной пограничного слоя (б)

На рисунке 4.22 траектории показаны в конфигурационном пространстве. Траектория робастной системы практически совпадает с заданной кривой, тогда как траектория метода вычисляемых моментов смещена относительно неё и во время действия возмущения образует петлю, удалённую от заданного контура на 0,4–0,5 рад.

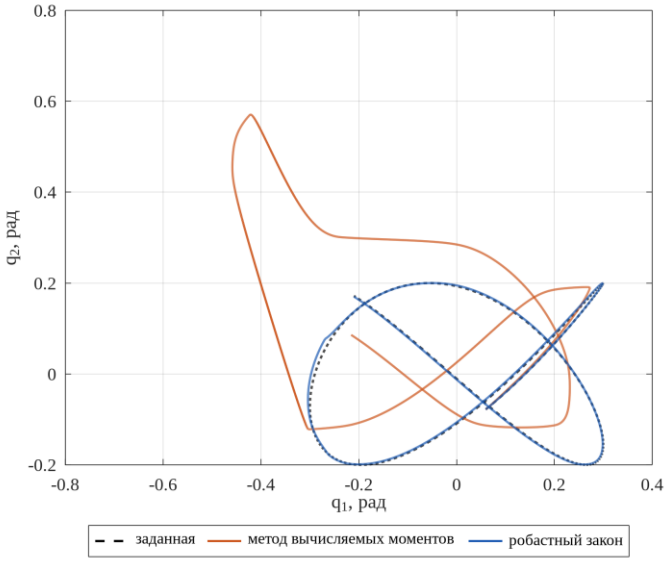


Рисунок 4.22 – Заданная и фактические траектории манипулятора в конфигурационном пространстве

Во втором сценарии масса второго звена в момент 5 с увеличивается с 1,0 до 1,5 кг, а модель регулятора остаётся прежней. Результаты приведены на рисунке 4.23. После изменения нагрузки наибольшие ошибки метода вычисляемых моментов составляют 0,099 и 0,135 рад, робастного закона — 0,0020 и 0,0028 рад, т. е. в 50 раз меньше. Робастный закон отрабатывает изменение нагрузки без перенастройки и без заметного переходного процесса, поскольку для него существенна лишь граница неопределённости, а не её конкретное значение.

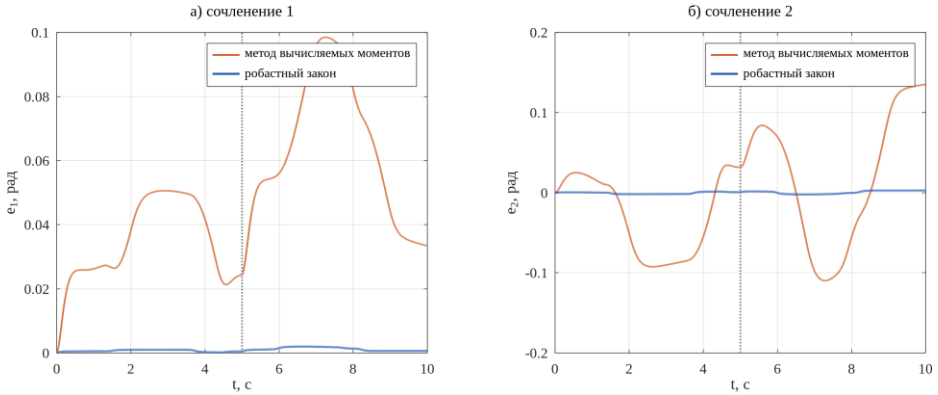


Рисунок 4.23 – Ошибки слежения первого (а) и второго (б) сочленений при скачкообразном увеличении нагрузки второго звена

Влияние ширины пограничного слоя исследовано в первом сценарии при $\rho = 100$ рад/с^2 и ε от 10^{-6} до 10^{-2} (рисунок 4.24). При увеличении ε от 10^{-4} до 10^{-2} наибольшая ошибка второго сочленения на интервале возмущения растёт от 0,014 до 0,40 рад, что согласуется с оценкой (4.25): чем шире слой, тем меньше эквивалентный коэффициент усиления. При уменьшении ε до 10^{-5} и 10^{-6} ошибка уменьшается лишь незначительно (до 0,003–0,006 рад), но управление переходит в режим переключений с частотой дискретизации: среднеквадратическое изменение момента второго привода за один шаг возрастает с 0,02 до 22–32 Н·м, т. е. возникает недопустимый дребезг. Значение $\varepsilon = 10^{-4}$ обеспечивает компромисс: ошибка остаётся малой, а момент привода — гладким.

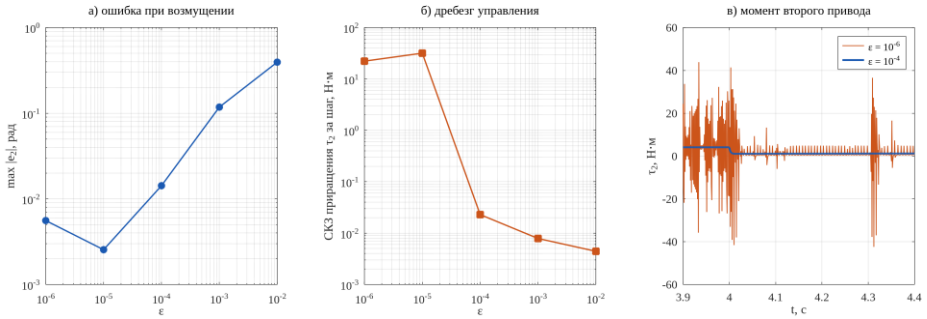


Рисунок 4.24 – Влияние ширины пограничного слоя: наибольшая ошибка второго сочленения (а), интенсивность дребезга управления (б) и момент второго привода при $\varepsilon = 10^{-6}$ и $\varepsilon = 10^{-4}$ (в)

Влияние коэффициента ρ при $\varepsilon = 10^{-4}$ показано на рисунке 4.25. Пока ρ меньше нормы неопределённости на интервале возмущения (около 70 рад/с^2), робастная поправка находится в насыщении и компенсирует возмущение лишь частично: при $\rho = 25$ и 50 рад/с^2 ошибка второго сочленения уменьшается с 0,525 до 0,365 и 0,197 рад. Когда ρ превышает норму неопределённости, ошибка резко уменьшается — до 0,014 рад при $\rho = 100$ и 0,007 рад при $\rho = 200$ рад/с^2. Это непосредственно подтверждает условие $\rho > \| \eta \|$, лежащее в основе синтеза. Наибольший момент второго привода при этом практически не меняется, а

момент первого привода кратковременно возрастает до 25 Н·м лишь при $\rho = 50$ рад/с^2, когда поправка работает в насыщении.

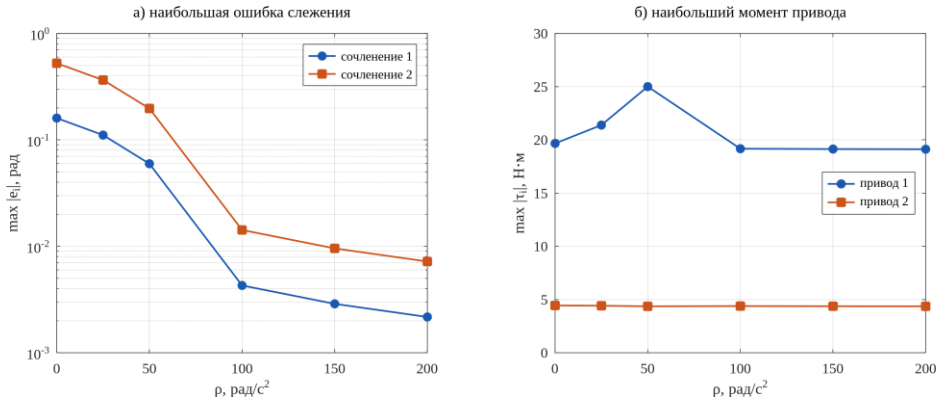


Рисунок 4.25 – Влияние коэффициента ρ на наибольшую ошибку слежения (а) и наибольший момент привода (б)

Чтобы оценить диапазон работоспособности, массы и моменты инерции звеньев в модели регулятора варьировались от −40 до +40 % от истинных значений при наличии трения (рисунок 4.26, а). Наибольшая норма ошибки метода вычисляемых моментов составляет от 0,08 до 0,29 рад и растёт с увеличением отклонения; даже при точных параметрах она равна 0,09 рад из-за неучтённого трения. Для робастного закона она во всём диапазоне не превышает 0,006 рад, т. е. примерно в 50 раз меньше.

При увеличении амплитуды импульса внешнего момента от 0 до 6 Н·м (рисунок 4.26, б) наибольшая ошибка метода вычисляемых моментов растёт практически пропорционально амплитуде — до 0,87 рад. Робастный закон с $\rho = 100$ рад/с^2 удерживает ошибку на уровне не более 0,02 рад до амплитуды 4 Н·м, а при 5–6 Н·м, когда норма неопределённости превышает ρ, ошибка возрастает до 0,20–0,36 рад. Если же выбрать $\rho = 236$ рад/с^2 по условию (4.20), ошибка во всём диапазоне амплитуд не превышает 0,03 рад. Таким образом, моделирование подтверждает и сам механизм робастности, и практическую пригодность оценки (4.20) для выбора параметров закона.

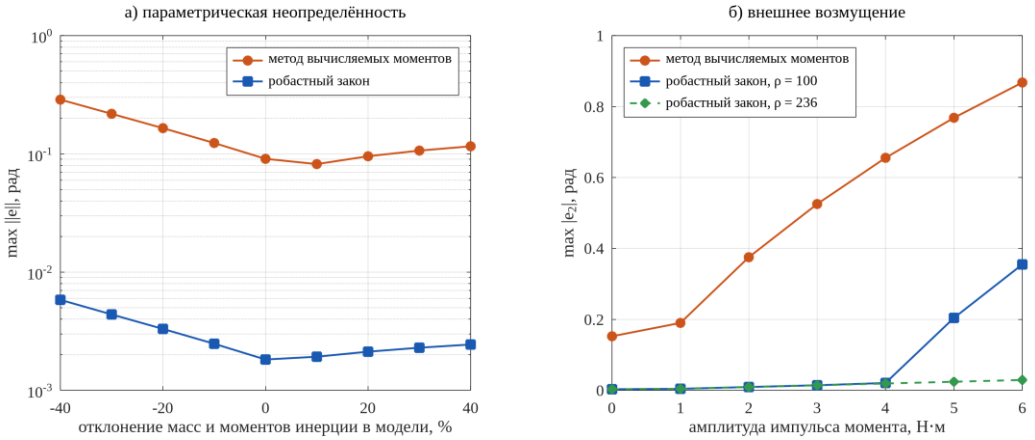


Рисунок 4.26 – Наибольшая ошибка слежения в зависимости от отклонения масс и моментов инерции в модели регулятора (а) и от амплитуды импульса внешнего момента (б)

Основные результаты сравнения сведены в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Сравнение метода вычисляемых моментов и робастного закона

Условия	Показатель	Метод вычисляемых моментов	Робастный закон	Уменьшение ошибки
Неточная модель и трение, 0–4 с	наибольшие ошибки, рад	0,051; 0,092	0,0010; 0,0019	≈ 50 раз
Импульс 3 Н·м, 4–6 с	наибольшие ошибки, рад	0,160; 0,525	0,0043; 0,0142	≈ 37 раз
Весь интервал 0–10 с	среднеквадратическая ошибка, рад	0,192	0,0046	≈ 41 раз
Весь интервал 0–10 с	наибольшие моменты, Н·м	19,7; 4,4	19,2; 4,4	—
Захват груза 0,5 кг, 5–10 с	наибольшие ошибки, рад	0,099; 0,135	0,0020; 0,0028	≈ 50 раз
Отклонение параметров ±40 %	наибольшая норма ошибки, рад	0,08…0,29	0,0018…0,0058	≈ 50 раз

Перспективность развития робастных методов траекторного управления подтверждается современными исследованиями. В работе [92] рассмотрен метод робастного управления манипулятором при наличии параметрических неопределённостей, нелинейностей исполнительных приводов и внешних возмущений. Предложенный подход предусматривает оценивание

неопределённых воздействий и применение управления со скользящим режимом для обеспечения устойчивости траекторного движения.

Результаты моделирования настоящего исследования показывают, что робастный закон сохраняет высокую точность слежения при одновременном действии параметрической неопределённости, неучтённого трения, внешнего импульса момента и скачкообразного изменения нагрузки, уменьшая ошибку в 37–50 раз по сравнению с методом вычисляемых моментов без увеличения моментов приводов. Качество работы определяется двумя параметрами, смысл которых прозрачен: коэффициент ρ должен превышать норму неопределённости, а ширина пограничного слоя ε определяет компромисс между точностью и гладкостью управления.

Выводы по разделу 4:

В разделе 4 исследовано нелинейное робастное траекторное управление последовательным роботом-манипулятором при наличии параметрических неопределённостей и внешних возмущений. Получены следующие основные результаты.

Исследовано влияние неточности математической модели на динамику ошибки траекторного слежения. Разработан нелинейный робастный закон траекторного управления на основе линеаризации обратной связью с дополнительной корректирующей составляющей. С использованием метода Ляпунова получены достаточные условия устойчивости и ограниченности ошибки слежения. Рассмотрена непрерывная реализация робастного закона, позволяющая уменьшить высокочастотные переключения управляющего воздействия.

Проведён частотный анализ чувствительности классической СТС-системы к внешним возмущениям. Получены амплитудно-частотные характеристики эквивалентной линейной системы и подтверждена их согласованность с результатами компьютерного моделирования.

Выполнено сравнительное компьютерное исследование классического СТС и разработанного робастного закона при параметрических неопределённостях, неучтённом трении, внешнем возмущающем моменте и изменении полезной нагрузки.

Таким образом, полученные результаты составляют теоретическое и численное обоснование третьего научного положения, выносимого на защиту, — «Нелинейный робастный закон траекторного управления роботом-манипулятором, основанный на линеаризации обратной связью и компенсации неопределённостей математической модели». Задачи нелинейного управления роботами-манипуляторами, применения прогнозирующих моделей и синтеза нелинейных контроллеров отражены в публикациях автора [80, 83].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решена научная задача разработки и исследования нелинейных методов траекторного управления многозвенным роботом-манипулятором на основе дифференциальной плоскостности, геометрического представления динамики, линеаризации обратной связью и робастной компенсации неопределённостей математической модели.

В результате проведённых теоретических исследований и компьютерного моделирования получены следующие основные результаты.

1. Проведён анализ современного состояния методов управления многозвенными роботами-манипуляторами. Установлено, что основными факторами, ограничивающими точность модельно-ориентированного траекторного управления, являются нелинейность динамики, взаимное влияние звеньев, неопределённость параметров математической модели и внешние возмущения. Обоснована целесообразность применения линеаризации обратной связью совместно с робастными методами управления.

2. Разработана математическая модель динамики двухзвенного робота-манипулятора с учётом инерционных, кориолисовых, центробежных и гравитационных составляющих. Исследовано представление полностью приводного последовательного манипулятора как дифференциально плоской системы управления особого типа — типа А. Показана связь классического метода вычисляемых моментов с обобщённым методом траекторного управления такими системами. Установлены условия преобразования нелинейной динамики к системе независимых двойных интеграторов посредством статической обратной связи.

3. Получено дифференциально-геометрическое представление динамики последовательного манипулятора на основе римановой метрики конфигурационного пространства, определяемой кинетической энергией. Для двухзвенного манипулятора построена поверхность, первая квадратичная форма которой совпадает с метрикой кинетической энергии. Получены выражения для символов Кристоффеля и гауссовой кривизны, установлена геометрическая интерпретация свободного движения как движения по геодезическим линиям. Геометрическое описание обобщено на многозвенный последовательный манипулятор.

4. Обоснована возможность точной линеаризации геометродинамического уравнения посредством статической обратной связи. Показано, что при точном знании параметров модели полученный закон управления эквивалентен методу вычисляемых моментов. Компьютерное исследование подтвердило согласованность классического и геометрического представлений динамики.

5. Разработан нелинейный робастный закон траекторного управления многозвенным манипулятором, основанный на компенсации номинальной динамики и введении дополнительной корректирующей составляющей. На основе прямого метода Ляпунова определены достаточные условия устойчивости замкнутой системы. Рассмотрена непрерывная реализация робастного управления, обеспечивающая ограниченность ошибки слежения при

принятых условиях и снижение интенсивности высокочастотных переключений управляющего воздействия.

6. Проведён частотный анализ чувствительности эквивалентной линейной СТС-системы к аддитивным возмущениям. Получены аналитические амплитудно-частотные характеристики, согласующиеся с результатами численного моделирования. Показано влияние частоты возмущающего воздействия на величину установившейся ошибки траекторного слежения.

7. Проведено сравнительное компьютерное исследование классического СТС и разработанного робастного закона управления двухзвенным манипулятором при параметрических неопределённостях, неучтённом трении, внешнем возмущающем моменте и скачкообразном изменении нагрузки. Установлено, что в исследованных условиях робастный закон обеспечивает уменьшение ошибок траекторного слежения в 37–50 раз по сравнению с классическим СТС. Исследовано влияние параметров робастной коррекции на точность слежения и гладкость управляющих моментов.

Таким образом, полученные результаты составляют теоретическое и численное обоснование трёх научных положений, выносимых на защиту: представления последовательного робота-манипулятора как дифференциально плоской системы особого типа и обобщённого метода вычисляемых моментов; геометрической интерпретации динамики манипулятора и её линеаризации статической обратной связью; нелинейного робастного закона траекторного управления с компенсацией неопределённостей математической модели.

Практическая значимость результатов заключается в возможности использования разработанных математических моделей, методов линеаризации и алгоритмов робастного управления при проектировании и исследовании систем траекторного управления последовательными роботами-манипуляторами. Результаты диссертационного исследования внедрены в учебный процесс Восточно-Казахстанского технического университета имени Д. Серикбаева при преподавании дисциплины «Нелинейные системы автоматического регулирования».

Результаты диссертационного исследования и связанные с ними научные разработки отражены в восьми публикациях автора. Теоретические предпосылки исследования представлены в обзорных работах [61, 62]. Вопросы разработки алгоритмов управления и синтеза нелинейного контроллера, связанные с первым научным положением, рассмотрены в публикациях [69, 83]. Геометрические и математические методы, тематически связанные со вторым научным положением, представлены в работах [70–72]. Исследования нелинейного управления манипулятором, относящиеся к тематике третьего научного положения, отражены в публикации [80].

Перспективы дальнейших исследований связаны с экспериментальной проверкой разработанного робастного закона управления на физическом роботе-манипуляторе, исследованием его работы при ограничениях моментов приводов и расширением области применения на многозвенные робототехнические системы с большим числом степеней свободы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Huczala D., Kot T., Pfurner M., Heczko D., Oščádal P., Mostýn V. Initial Estimation of Kinematic Structure of a Robotic Manipulator as an Input for Its Synthesis // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11, № 8. – P. 1–19. DOI: 10.3390/app11083548.

2. Li B., Li X., Gao H., Wang F.-Y. Advances in Flexible Robotic Manipulator Systems—Part I: Overview and Dynamics Modeling Methods // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2024. – Vol. 29, № 2. – P. 1100–1110. DOI: 10.1109/TMECH.2024.3359067.

3. Ghorbanpour A. Cooperative Robot Manipulators Dynamical Modeling and Control: An Overview // Dynamics. – 2023. – Vol. 3. – P. 820–854. DOI: 10.3390/dynamics3040045.

4. Xie J. Dynamic Modeling and Control of Flexible Manipulators: A Review // Advances in Engineering Research: Proceedings of the 2nd International Conference on Machinery, Electronics and Control Simulation (MECS 2017). – 2017. – Vol. 138. – P. 270–275.

5. Spacek L., Vojtesek J., Gazdos F. Control of Unstable Systems Using a 7 DoF Robotic Manipulator // Machines. – 2022. – Vol. 10, № 12. – P. 1–14. DOI: 10.3390/machines10121164.

6. Kumar P., Pratiher B. Nonlinear Modelling and Dynamics of Spatial Multi-Link Rigid-Flexible Manipulator with Moving Platform // Research Square. – 2023. – P. 1–28. DOI: 10.21203/rs.3.rs-3231631/v1.

7. Scalera L., Fabris G., Boscariol P., Gasparetto A. Minimum-Jerk Trajectory Planning in Robotic Manipulators with Kinematic Redundancy // Journal of Mechanisms and Robotics. – 2026. – Vol. 18, № 10. – P. 104501-1–104501-10. DOI: 10.1115/1.4072578.

8. Elhadidy M. S., Ayyad S. M., Shaaban W., Abdalla W. S., Saafan M. M. Cloud-Assisted IoRT Framework for Latency-Aware Analytical Kinematic Control of a Six-DOF Robotic Manipulator // Scientific Reports. – 2026. – Vol. 16, № 25482. – P. 1–34. DOI: 10.1038/s41598-026-65330-w

9. Vemuri S. A. Kinematic Optimisation of Soft Robotic Manipulators for Medical Intervention // Power System Protection and Control. – 2026. – Vol. 54, № 3. – P. 211–224. DOI: 10.46121/pspc.54.3.16.

10. Cândido A. de S. Forward Kinematic Analysis and Experimental Validation of the 4-DOF Dobot Magician Robotic Manipulator // Research Square. – 2026. – P. 1–12. DOI: 10.21203/rs.3.rs-10856321/v1.

11. Zhang Y., Wang H. Redundancy-Based Motion Planning with Task Constraints for Robot Manipulators // Sensors. – 2025. – Vol. 25, № 6. – Article 1900. DOI: 10.3390/s25061900.

12. Chourasia G., Shrivastava A., Jaipuriyar P., Bhatt Z. S. K., Khan A. S., Das A. 7-DOF Robotic Manipulator for Autonomous Segregation Using Transfer Learning // Proceedings of the 2019 6th International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACom). – 2019. – P. 1135–1138. 2

13. Gallardo-Alvarado J., Sanchez-Rodriguez A., Orozco-Mendoza H., Rodriguez-Castro R., Alcaraz-Caracheo L. A. Kinematic Modeling of a Novel (3+1)-Degree-of-Freedom Planar Parallel Manipulator Using Screw Theory // Algorithms. – 2026. – Vol. 19, № 7. – Article 502. – P. 1–22. DOI: 10.3390/a19070502.

14. Rigó L., Fabianová J., Kovalčík J. Digital Twin and Virtual Monitoring of a 6-DOF Robotic Manipulator // Logistics. – 2026. – Vol. 10, № 9. – Article 205. – P. 1–18. DOI: 10.3390/logistics10090205.

15. Murugesan S., Shanmugam G. P., Mohammed Ibrahim M. H., Ponnusamy R. Constrained Model Predictive Control for Enhanced Trajectory Tracking in Multi-DOF Robotic Manipulators // IAES International Journal of Robotics and Automation. – 2026. – Vol. 15, № 2. – P. 331–340. DOI: 10.11591/ijra.v15i2.pp331-340.

16. Raoufi M., Habibi H., Yazdani A., Wang H. Robust Prescribed Trajectory Tracking Control of a Robot Manipulator Using Adaptive Finite-Time Sliding Mode and Extreme Learning Machine Method // Robotics. – 2022. – Vol. 11, № 5. – Article 111. – P. 1–29. DOI: 10.3390/robotics11050111.

17. Baressi Šegota S., Anđelić N., Šercer M., Meštrić H. Dynamics Modeling of Industrial Robotic Manipulators: A Machine Learning Approach Based on Synthetic Data // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, № 7. – Article 1174. – P. 1–17. DOI: 10.3390/math10071174.

18. Subedi D., Tyapin I., Hovland G. Dynamic Modeling of Planar Multi-Link Flexible Manipulators // Robotics. – 2021. – Vol. 10, № 2. – Article 70. – P. 1–26. DOI: 10.3390/robotics10020070.

19. Yang Q., Ma X., Wang W., Peng D. Adaptive Non-Singular Fast Terminal Sliding Mode Trajectory Tracking Control for Robot Manipulators // Electronics. – 2022. – Vol. 11, № 22. – Article 3672. – P. 1–17. DOI: 10.3390/electronics11223672.

20. Rahmani M., Redkar S. Robot Manipulator Control Using a Robust Data-Driven Method // Fractal and Fractional. – 2023. – Vol. 7, № 9. – Article 692. – P. 1–14. DOI: 10.3390/fractalfract7090692.

21. Iliukhin V. N., Mitkovskii K. B., Bizyanova D. A., Akopyan A. A. Simulation–Based Control and Vision Prototype for a 5-DOF Waste-Sorting Robot // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 176. – P. 498–505. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.349.

22. Singh A., Venkatesan K., Nagarasan Y., Ramanujam K., Karuppusamy K. Mathematical Modeling and Kinematic Analysis of 5 Degrees of Freedom Serial Link Manipulator for Online Real-Time Pick and Place Applications // International Journal of Electrical and Computer Engineering. – 2023. – Vol. 13, № 2. – P. 1522–1532. DOI: 10.11591/ijece.v13i2.pp1522-1532.

23. Hock O., Šedo J. Forward and Inverse Kinematics Using Pseudoinverse and Transposition Method for Robotic Arm DOBOT // In book: Kinematics. – 2017. – P. 75–94. DOI: 10.5772/intechopen.71417.

24. Agustian I., Daratha N., Faurina R., Suandi A., Sulistyaningsih. Robot Manipulator Control with Inverse Kinematics PD-Pseudoinverse Jacobian and Forward Kinematics Denavit Hartenberg // Jurnal Elektronika dan Telekomunikasi. – 2021. – Vol. 21, № 1. – P. 8–18. DOI: 10.14203/jet.v21.8-18.

25. López-Franco C., Hernández-Barragán J., Alanis A. Y., Arana-Daniel N., López-Franco M. Inverse Kinematics of Mobile Manipulators Based on Differential Evolution // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2018. – Vol. 15, № 1. – P. 1–22. DOI: 10.1177/1729881417752738.

26. Dulęba I. Singularity-Robust Inverse Kinematics for Serial Manipulators // Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems. – 2023. – Vol. 17, № 3. – P. 38–45. DOI: 10.14313/JAMRIS/3-2023/21.

27. Malik A., Lischuk Y., Henderson T., Prazenica R. A Deep Reinforcement-Learning Approach for Inverse Kinematics Solution of a High Degree of Freedom Robotic Manipulator // Robotics. – 2022. – Vol. 11, № 2. – Article 44. – P. 1–17. DOI: 10.3390/robotics11020044.

28. He H. Modeling and Simulation for a Five DOF Robotic Arm Manipulator // Highlights in Science, Engineering and Technology. – 2023. – Vol. 43. – P. 300–307.

29. Zhao B., Zheng D., Song X., Qian K. Robotic Manipulator Kinematics Analysis and Modelling Associate with MATLAB Simulink // In book: Applied Mathematics, Modeling and Computer Simulation. – 2023. – P. 822–833. DOI: 10.3233/ATDE231022.

30. Goritov A., Molokova M. Automatic Calculation of the Dynamic Characteristics of the Manipulator on the Basis of Euler–Lagrange Equation // Advances in Computer Science Research: Proceedings of the IV International Research Conference “Information Technologies in Science, Management, Social Sphere and Medicine” (ITSMSSM 2017). – 2017. – Vol. 72. – P. 312–316.

31. Mickoski H., Mickoski I., Djidrov M. Dynamic Modeling and Simulation of Three-Member Robot Manipulator // Mathematical Models in Engineering. – 2018. – Vol. 4, № 4. – P. 183–190. DOI: 10.21595/mme.2018.20319.

32. Sánchez-Sánchez P., Arteaga-Pérez M. A. Simplied Methodology for Obtaining the Dynamic Model of Robot Manipulators // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2012. – Vol. 9. – Article 170. – P. 1–12. DOI: 10.5772/51305.

33. Luz Junior J. A. G., Balthazar J. M., Ribeiro M. A., Janzen F. C., Tusset A. M. Dynamic Model of a Robotic Manipulator with One Degree of Freedom with Friction Component // International Journal of Robotics and Control Systems. – 2023. – Vol. 3, № 2. – P. 315–329. DOI: 10.31763/ijrcs.v3i2.984.

34. Jing X., Gao H., Chen Z., Wang Y. A Recursive Dynamic Modeling and Control for Dual-Arm Manipulator with Elastic Joints // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 155093–155102. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3018470.

35. Xu S., Wu Z., Shen T. High-Precision Control of Industrial Robot Manipulator Based on Extended Flexible Joint Model // Actuators. – 2023. – Vol. 12, № 9. – Article 357. – P. 1–17. DOI: 10.3390/act12090357.

36. Omar M., Asker A., Li R. A Framework for Data Driven Dynamic Modelling of Serial Manipulators // IEEE Access. – 2022. – Vol. 10. – P. 124874–124883. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3223182.

37. Istiqphara S., Wahyunggoro O., Cahyadi A. I. Enhanced Equation Discovery of 3-DoF Robotic Manipulator Dynamics Using LASSO Model Selection Criteria with

Variable Segregation Algorithm // IEEE Access. – 2024. – Vol. 12. – P. 20574–20590. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3354374.

38. Medrano-Hermosillo J. A., Lozoya-Ponce R., Rodriguez-Mata A. E., Baray-Arana R. Phase-Space Modeling and Control of Robots in the Screw Theory Framework Using Geometric Algebra // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, № 3. – Article 572. – P. 1–17. DOI: 10.3390/math11030572.

39. Yih C.-C., Wu S.-J. Adaptive Task-Space Manipulator Control with Parametric Uncertainties in Kinematics and Dynamics // Applied Sciences. – 2020. – Vol. 10, № 24. – Article 8806. – P. 1–18. DOI: 10.3390/app10248806.

40. Zhang C., Wu Y. P-Rob Six-Degree-of-Freedom Robot Manipulator Dynamics Modeling and Anti-Disturbance Control // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 141403–141420. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3119570.

41. Zhang G., Cheng D. Adaptive Fault-Tolerant Guaranteed Performance Control for Euler-Lagrange Systems with Its Application to a 2-Link Robotic Manipulator // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 184160–184171. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3029522.

42. Larby D., Forni F. A Passivity Preserving H-Infinity Synthesis Technique for Robot Control. – P. 1–7.

43. Kumar P., Pratiher B. Tip Trajectory Characteristics and Nonlinear Stability Analysis of Robotic Manipulator with Flexible Links-Joints // Research Square. – P. 1–34. DOI: 10.21203/rs.3.rs-603725/v1.

44. Ba D. X., Bae J. A Nonlinear Sliding Mode Controller of Serial Robot Manipulators with Two-Level Gain-Learning Ability // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 189224–189235. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3032449.

45. Zhang X., Shi R., Zhu Z., Quan Y. Adaptive Nonsingular Fixed-Time Sliding Mode Control for Manipulator Systems' Trajectory Tracking // Complex & Intelligent Systems. – 2023. – Vol. 9. – P. 1605–1616. DOI: 10.1007/s40747-022-00864-w.

46. Guo K., Shi P., Wang P., He C., Zhang H. Non-Singular Terminal Sliding Mode Controller with Nonlinear Disturbance Observer for Robotic Manipulator // Electronics. – 2023. – Vol. 12, № 4. – Article 849. – P. 1–12. DOI: 10.3390/electronics12040849.

47. Ahmed M. S., Mary A. H., Jasim H. H. Robust Computed Torque Control for Uncertain Robotic Manipulators // Al-Khwarizmi Engineering Journal. – 2021. – Vol. 17, № 3. – P. 22–28. DOI: 10.22153/kej.2021.09.002.

48. Chen C., Zhang C., Hu T., Ni H., Luo W. Model-Assisted Extended State Observer-Based Computed Torque Control for Trajectory Tracking of Uncertain Robotic Manipulator Systems // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2018. – Vol. 15. – P. 1–12. DOI: 10.1177/1729881418801738.

49. Neranon P., Bicker R. Force/Position Control of a Robot Manipulator for Human-Robot Interaction. – P. 1–12.

50. Kong D., Huang Q. Impedance Force Control of Manipulator Based on Variable Universe Fuzzy Control // Actuators. – 2023. – Vol. 12, № 8. – Article 305. – P. 1–19. DOI: 10.3390/act12080305.

51. Gierlak P. Adaptive Position/Force Control of a Robotic Manipulator in Contact with a Flexible and Uncertain Environment // Robotics. – 2021. – Vol. 10, № 1. – Article 32. – P. 1–27. DOI: 10.3390/robotics10010032.

52. Jiang Y., Lu K., Gong C., Liang H. Robust Composite Nonlinear Feedback Control for Uncertain Robot Manipulators // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2020. – Vol. 17. – P. 1–9. DOI: 10.1177/1729881420914805.

53. Xue X., Huang H., Zuo L., Wang N. A Compliant Force Control Scheme for Industrial Robot Interactive Operation // Frontiers in Neurorobotics. – 2022. – Vol. 16. – Article 865187. – P. 1–10. DOI: 10.3389/fnbot.2022.865187.

54. Lv C., Chen G., Zhao H., Chen J., Yu H. An Adaptive Robust Hybrid Force/Position Control for Robot Manipulators System Subject to Mismatched and Matched Disturbances // IEEE Access. – 2024. – Vol. 12. – P. 42264–42278. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3377907.

55. Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P. On Differentially Flat Nonlinear Systems // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. – 1992. – Vol. 315. – P. 619–624.

56. Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P. Flatness and Defect of Non-Linear Systems: Introductory Theory and Examples // International Journal of Control. – 1995. – Vol. 61, № 6. – P. 1327–1361

57. Diaz E. V., Slama J., Dutra M., Lengerke O., Tavera M. M. Trajectory Tracking for Robot Manipulators Using Differential Flatness // Ingeniería e Investigación. – 2011. – Vol. 31, № 2. – P. 84–90.

58. Markus E. D., Agee J. T., Jimoh A. O. Differentially Flat Trajectory Control of a 6-DOF Industrial Robot Manipulator // Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications (CA 2013). – Honolulu, USA, 26–28 August 2013. – P. 215–221. DOI: 10.2316/P.2013.805-072.

59. Tang C. P., Miller P. T., Krovi V. N., Ryu J.-C., Agrawal S. K. Differential-Flatness-Based Planning and Control of a Wheeled Mobile Manipulator—Theory and Experiment // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2010. – P. 1–6. DOI: 10.1109/TMECH.2010.2066282.

60. Feliu-Talegon D., Sira-Ramirez H., Feliu-Batlle V. Trajectory Tracking Problem for a Flexible Mobile Manipulator: A Flatness Based Approach Combined with Active Disturbance Rejection Control // IFAC-PapersOnLine. – 2023. – Vol. 56, № 2. – P. 6338–6343. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.813.

61. Оразова А. Ж., Кадыролдина А., Толыкбаева М., Красавин А., Алонцева Д. Нелинейное управление роботами-манипуляторами – краткий обзор последних достижений // Вестник ВКТУ им. Д. Серикбаева. – 2022. – № 3. – С. 182–189. DOI: 10.51885/1561-4212_2022_3_182.

62. Оразова А. Ж., Толыкбаева М. Б., Алонцева Д. Л. Робот-манипуляторды басқарудың бейімделген және сызықты емес әдістері // Материалы VIII Международной научно-технической конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана». – Усть-Каменогорск: ВКТУ им. Д. Серикбаева, 2022. – Ч. IV. – С. 220–224.

63. Pyrhönen L., Mikkola A., Naets F. System Identification and Force Estimation of Robotic Manipulator Using Semirecursive Multibody Formulation // Multibody System Dynamics. — 2025. — Vol. 64. — P. 167–194.

64. Li X.-A., Zhang D., Jia X., Han X., Ning G., Li Q. A Bayesian Learning Approach for Dynamic Parameter Identification and Its Applications in Industrial Robotic Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2025. — Vol. 441. — Article 117951.

65. Wensing P. M., Niemeyer G., Slotine J.-J. E. A Geometric Characterization of Observability in Inertial Parameter Identification // The International Journal of Robotics Research. — 2024.

66. Krasavin A., Nazenova G., Dairbekova A., Kadyroldina A., Haidegger T., Alontseva D. Sensor-Based Differential Flatness-Based Trajectory Tracking Method and Its Application to Wheeled Mobile Robot Control // Sensors. — 2026. — Vol. 26, № 12. — Article 3676.

67. Nicolau F., Nowicki M., Respondek W. Flatness and Normal Forms of Mechanical Systems with 3 DOF and 2 Inputs // IFAC-PapersOnLine. — 2024. — Vol. 58, № 6. — P. 250–255.

68. Saraiva E. S., Govoni L., Salton A. T., Flores J. V., Cristofaro A. Practical Output Regulation of Robotic Manipulators: A Comparison Study // European Journal of Control. — 2025. — Vol. 82. — Article 101199.

69. Kadyroldina A. T., Orazova A. Zh., Krasavin A. L., Kazantsev I. G., Dyomina I. A., Alontseva D. L. Development of New Control Algorithms for a Robotic Arm Equipped with a 3D Scanning or Machine Vision System // D. Serikbayev EKSTU Bulletin. — 2022. — № 1. — P. 39–59. DOI: 10.51885/1561-4212_2022_1_39

70. Krasavin A., Alontseva D., Kussaiyn-Murat A., Kadyroldina A., Orazova A. A Novel Method for the Identification of Flat Curves // Proceedings of the 18th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2023). — Székesfehérvár: Óbuda University, 2023. — P. 73–79.

71. Kussaiyn-Murat A., Kadyroldina A., Krasavin A., Tolykbayeva M., Orazova A., Nazenova G., Krak I., Haidegger T., Alontseva D. Application of Discrete Exterior Calculus Methods for the Path Planning of Manipulator Performing Thermal Plasma Spraying of Coatings // Sensors. — 2025. — Vol. 25, № 3. — Article 708. DOI: 10.3390/s25030708.

72. Kazantsev I. G., Orazova A. Zh., Alontseva D. L., Dyomina I. A. Control Matrix of the Singular Value Decomposition of the Radon Transform // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2025. — Vol. 22, № 1. — P. 244–251. DOI: 10.33048/semi.2025.22.017.

73. Dubois F., Ramírez-de-Ávila H. C., Rojas-Quintero J. A. Riemannian Formulation of Pontryagin's Principle for Robotic Manipulators // Monografías Matemáticas García de Galdeano. — 2024. — Vol. 43. — P. 129–140.

74. Li Y., Qiu J., Calinon S. A Riemannian Take on Distance Fields and Geodesic Flows in Robotics // The International Journal of Robotics Research. — 2026.

75. Bao R., Wang J., Wang S. Geodesic-Based Path Planning for Port Transfer Robots on Riemannian Manifolds // Expert Systems with Applications. — 2026. — Vol. 298, Part B. — Article 129706.

76. Zhou R., Zhao T., Yang H., Su Q. An Online Dynamic Parameter Identification Approach for Robotic Manipulator with Reformulated Physical Feasibility // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. — 2025. — Vol. 74. — Article 7508314.

77. Jang J., Park J. H. A Method of Estimating an Object's Parameters Based on Simplication with Momentum for a Manipulator // Applied Sciences. — 2025. — Vol. 15, № 7. — Article 3989.

78. Momani M. A., Hosseinzadeh M. Physically Feasible Dynamic Model Identification and Constrained Control of Robotic Arms: A Case Study on the ViperX-300 6-DoF Robotic Manipulator // Mechatronics. — 2025. — Vol. 112. — Article 103419.

79. Wen C., Grigorev M. A., Kushnarev V., Zhang S., Kholodilin I. Integrated Mathematical Modelling of a Robot Manipulator Control System Using ANSYS and MATLAB Simulink for Accurate Dynamic Response Prediction // Applied Sciences. — 2026. — Vol. 16, № 4.

80. Оразова А. Ж., Кадыролдина А. Т., Красавин А. Л., Алонцева Д. Л., Құсайын-Мұрат Ә. Т. Нелинейное управление роботом-манипулятором с использованием модели прогнозирования // Вестник ВКТУ им. Д. Серикбаева. — 2024. — № 1. — С. 226–234. DOI: 10.51885/1561-4212_2024_1_226.

81. Belgacem H., Abuabiah M., Chihi I. High-Fidelity Virtual Model for Industrial Robot Control Under Uncertain and Disturbed Scenarios: A Comparative Study on the UR5e // IEEE Access. — 2025. — Vol. 13. — P. 152063–152089.

82. Fan Q., Wei H., Gao H., Zhang X. Sliding Mode Robust Control for Robotic Manipulators Based on Computed Torque Method // Manufacturing Technology & Machine Tool. — 2025. — № 10. — P. 138–148.

83. Оразова А. Ж., Алонцева Д. Л., Красавин А. Л. Синтез нелинейного контроллера робота-манипулятора // Материалы X Международной научно-технической конференции «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана». — Усть-Каменогорск: ВКТУ им. Д. Серикбаева, 2024. — Ч. III. — С. 197–202.

84. Tam L. T. M., Ngu N. V., Pham D. H., Vu M. T. Robust Augmented Computed Torque Control for Enhanced Tracking of 6-DoF Manipulators Under External Disturbances // Applied Sciences. — 2026. — Vol. 16, № 10. — Article 5036.

85. Wang Y., Wang M. Adaptive Fault-Tolerant Sliding Mode Control Design for Robotic Manipulators with Uncertainties and Actuator Failures // Symmetry. — 2025. — Vol. 17, № 9. — Article 1547.

86. Hu S., Wan Y., Liang X. Adaptive Fast Terminal Sliding Mode Control of Robotic Manipulators Based on Joint Torque Estimation and Friction Compensation // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2024. — Vol. 34, № 18. — P. 12223–12238.

87. Ali I., Hassan M., Bano Z., Jawo E., Almazah M. M. A. Robust Control of Robot Manipulator Dynamics with Two Stages Algorithm of Optimal and Integral Sliding Mode Approaches // Scientific Reports. — 2025. — Vol. 15. — Article 36585.

88. Jokar H., Naghipour A., Jeloudari I. A New Adaptive Robust Control Scheme for Trajectory Tracking of Robot Manipulators with Uncertain Dynamics Model // IET Control Theory & Applications. — 2025. — Vol. 19, № 1. — Article e70039.

89. Zhang S., Chen Z., Zhang X. Robust Adaptive Nonlinear Admittance Control of Robotic Manipulators with Extra-Intra Uncertainties and Disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2025. — Vol. 35, № 11. — P. 4841–4856.

90. Ku X., Li S., Zhu E. Robot Dynamic Parameter Identification Based on Nonlinear Friction and Hierarchical Iterative Optimization // Machines. — 2026. — Vol. 14, № 7. — Article 783.

91. Li X., Lu Q., Huang Z., Li K. Robust Torque-Computed Control for a Robot Manipulator with Unit Dual Quaternion // IEEE Transactions on Industrial Electronics. — 2025. — Vol. 72, № 10. — P. 10728–10738.

92. Javaid U., Basin M., Ijaz S., Khan M. N., Garza-Alonso A. Finite-time robust trajectory tracking control for robotic manipulator under actuator nonlinearities and parametric uncertainties // Journal of the Franklin Institute. – 2025. – Vol. 362, № 13. – Article 107891.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Акт о внедрении научно-исследовательской работы в учебный процесс

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Д. СЕРИКБАЕВА»

СОГЛАСОВАНО
Член правления - проректор
по науке и инновациям
Конурбаева Ж.Т.
«___» ___ 2024 г.

УТВЕРЖДАЮ
Член правления-проректор
по академическим вопросам
Машекенова А.Х.
«28» 02 2024 г.

АКТ
о внедрении научно-исследовательской работы (этапа)
в учебный процесс

Комиссия Восточно-Казахстанского технического университета им. Д. Серикбаева в составе: председатель: Машекенова А. Х. - проректор по академическим вопросам, члены: декан Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта Хасенова З. Т., руководитель Образовательной программы Кадыролдина А.Т., член комитета по качеству Алимханова А. Ж., председатель комитета по качеству ШЦТиИИ Сулейменова Л. Р. составили настоящий акт о том, что в 2023/2024 учебном году на образовательной программе 6В07101 – «Автоматизация и управление» внедрены результаты научно-исследовательской работы докторанта Оразовой А.Ж., выполненной под руководством профессора ШЦТиИИ, д.ф.-м.н. Алонцевой Д.Л., на тему: «Применение нелинейных методов для управления многозвенным роботом-манипулятором».

№ п/п	Форма внедрения (наименование нового курса, спецкурса, раздела лекций, лаб. работы, установки, учебные пособия и т.п.); курс, специальность	Объем внедрения (количество работ, лекционных часов)	Краткое содержание внедренной работы
1	Результаты НИР «Применение нелинейных методов для управления многозвенным роботом-манипулятором» внедрены в курс «Нелинейные системы автоматического регулирования» (5 кредитов) 3 курса на базе СО и 2 курса на базе СПО по образовательной программе 6В07101 Автоматизация и управление. Учебные материалы соответствуют силлабусу	Лекции: «3» - кол-во час. Задания для самостоятельной работы обучающегося (СРО): «15» - кол-во часов	Учебные материалы (статьи): 1. Оразова А.Ж., Кадыролдина А.Т., Толыкбаева М.Б., Красавин А.Л., Алонцева Д.Л. *Нелинейное управление роботами-манипуляторами – краткий обзор последних достижений*//Вестник ВКТУ им. Д. Серикбаева» № 3, 2022, стр. 182-189, DOI 10.51885/1561-4212_2022_3_182; 2. Оразова А.Ж., Кадыролдина А.Т., Красавин А.Л., Алонцева Д.Л., Құсайын-Мұрат Ә.Т. *Нелинейное управление роботом-манипулятором с использованием модели прогнозирования*//Вестник

	по данной дисциплине по разделу лекций и заданий для самостоятельной работы обучающегося (СРО).		ВКТУ им. Д. Серикбаева» № 1, 2024; 3. Оразова А.Ж., Толыкбаева М.Б., Алонцева Д.Л. *Робот-манипуляторды басқарудың бейімделген және сызықты емес әдістері*/Сборник трудов Международной НТК «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана» ВКТУ им. Д. Серикбаева, Апрель 2022г., г.Усть-Каменогорск, Казахстан, стр. 220-224, используются при чтении лекций по темам: Тема 13. Абсолютная устойчивость нелинейных систем, Тема 14. Дискретные системы управления, Тема 15. Передаточные функции дискретных систем, и для заданий для самостоятельной работы обучающегося (СРО) по темам: «Управление на основе прогнозирующих моделей (nonlinear mpc control)», «Управление манипуляторами и программное обеспечение, позволяющее проводить компьютерную симуляцию процесса траекторного управления многозвенным роботом-манипулятором в среде Matlab».

Материалы к настоящему акту рассмотрены на заседании комитета по качеству Школы цифровых технологии и искусственного интеллекта (протокол № 9 от 16.02.2024 г.)

Члены комиссии:

Декан Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта — Хасенова З.Т.

Руководитель Образовательной программы 6В07101 - «Автоматизация и управление» — Кадыролдина А.Т.

Член комитета по качеству ШЦТиИИ — Алимханова А. Ж.

Председатель комитета по качеству ШЦТиИИ — Сулейменова Л.Р.